

SAGARPA



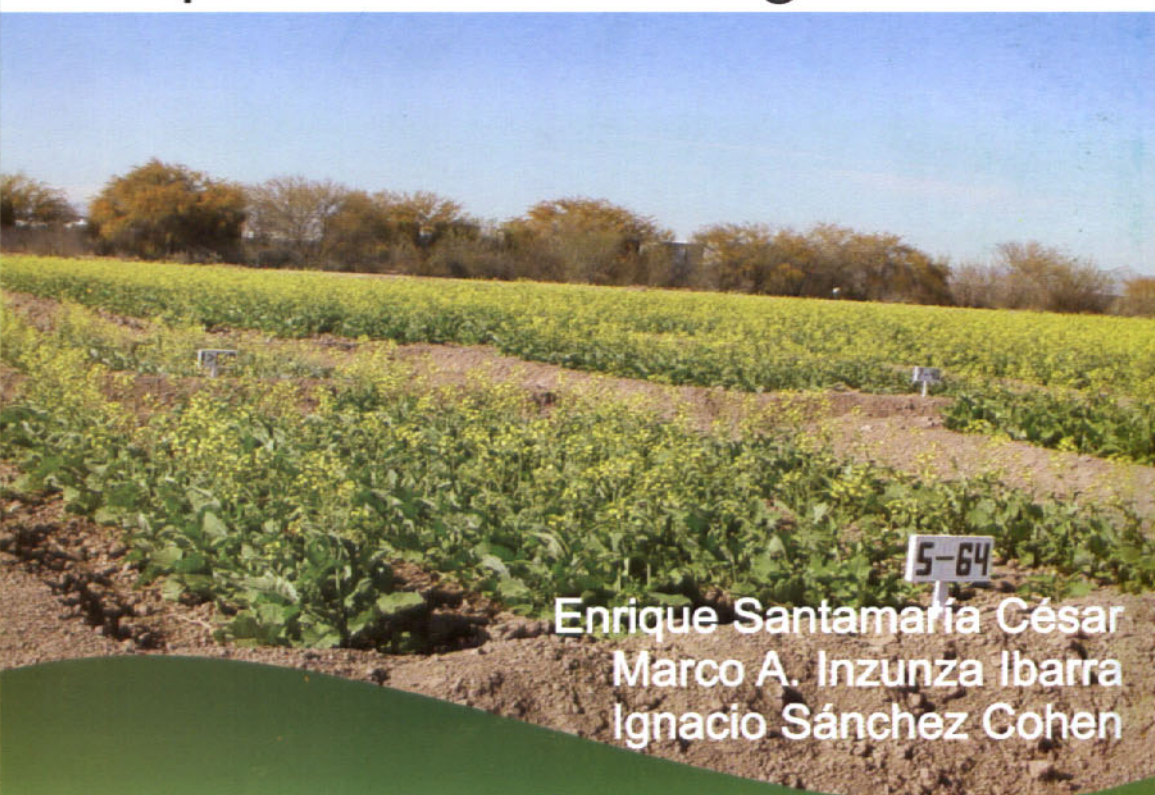
SECRETARÍA DE AGRICULTURA,
GANADERÍA, DESARROLLO RURAL,
PESCA Y ALIMENTACIÓN



inifap

Instituto Nacional de Investigaciones
Forestales, Agrícolas y Pecuarias

Análisis Estadístico con Aplicaciones en Agronomía



Enrique Santamaría César
Marco A. Inzunza Ibarra
Ignacio Sánchez Cohen

CENID-RASPA

Gómez Palacio, Durango

Diciembre del 2009

SERIE: MX-0-310205-52-10-00-06-04

ISBN:978-607-425-247-7

Libro Técnico N° 4

DIRECTORIO INSTITUCIONAL

**SECRETARÍA DE AGRICULTURA, GANADERÍA, DESARROLLO RURAL, PESCA Y
ALIMENTACIÓN**

Lic. Francisco Javier Mayorga Castañeda
Secretario

M.C. Mariano Ruiz-Funes Macedo
Subsecretario de Agricultura

Ing. Ignacio Rivera Rodríguez
Subsecretario de Desarrollo Rural

Dr. Pedro Adalberto González Hernández
Subsecretario de Fomento a los Agronegocios

**INSTITUTO NACIONAL DE INVESTIGACIONES FORESTALES, AGRÍCOLAS Y
PECUARIAS**

Dr. Pedro Brajcich Gallegos
Director General

Dr. Salvador Fernández Rivera
Coordinador de Investigación, Innovación y Vinculación

Dr. Enrique Astengo López
Coordinador de Planeación y Desarrollo

Lic. Marcial A. García Morteo
Coordinador de Administración y Sistemas

**CENTRO NACIONAL DE INVESTIGACIÓN DISCIPLINARIA
EN RELACIÓN AGUA-SUELO-PLANTA-ATMÓSFERA**

Dr. José Antonio Cueto Wong
Director

Análisis Estadístico con Aplicaciones en Agronomía

DIRECTORIO INSTITUCIÓN CO-AUTORA

**Universidad Autónoma de Chapingo - Unidad Regional de Zonas Áridas. UACH -
URUZA**

Dr. Aureliano Peña Lomelí
Rector

Dr. Marcos Portillo Vázquez
Director General de Investigación y Posgrado

Dr. Jesús María Garza López
Director General de Administración

M. C. Ignacio Miranda Velázquez
Director General de Patronato

M. I. Martín Soto Escobar
Director General de Difusión Cultural y Servicio

Lic. Fabiola García Hernández
Jefe del Departamento de Publicaciones



inifap

Instituto Nacional de Investigaciones
Forestales, Agrícolas y Pecuarias

Análisis Estadístico con Aplicaciones en Agronomía

Enrique Santamaría César¹

Marco A. Inzunza Ibarra²

Ignacio Sánchez Cohen²

¹Profesor de la Universidad Autónoma de Chapingo - Unidad Regional de Zonas Áridas.(UACH-URUZA).

²Investigador del Centro Nacional de Investigación Disciplinaria en Relación Agua-Suelo-Planta-Atmósfera (CENID-RASPA) del Instituto Nacional de Investigaciones Forestales Agrícolas y Pecuarias (INIFAP).

CENID-RASPA-INIFAP - UACH-URUZA
Gómez Palacio, Dgo.
DICIEMBRE 2009.

Instituto Nacional de Investigaciones Forestales, Agrícolas y Pecuarias

**Av. Progreso No. 5
Barrio de Santa Catarina
Delegación Coyoacán
04010 México, D. F.
www.inifap.gob.mx**

Primera Edición 2009 D. R. ©

ISBN: 978-607-425-247-7

No esta permitida la reproducción total o parcial de esta publicación, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de la Institución.

Impreso y hecho en México

CONTENIDO

Página

Capítulo. 1

Principios básicos para la planeación de una investigación	1
1.1 Planeación de una investigación	2
1.2 Repeticiones del experimento básico	3
1.3 Error experimental y unidades experimentales	6
1.3.1 Recomendaciones generales para reducir el error experimental	7
1.4 Aleatorización	7
1.5 Número de repeticiones del experimento básico	9
1.6 Control local del error experimental	11
1.6.1 Bloqueo	11
1.7 El análisis de covarianza	12
1.8 Factores fijos y aleatorios	12
1.9 Factores cruzados o anidados	13
1.10 Construcción de la tabla de análisis de varianza en diseños completos balanceados	16
1.11 Reglas para obtener las esperanzas de los cuadrados medios en diseños completos balanceados	17

Capítulo. 2

Inferencias sobre dos poblaciones	26
2.1 Muestras aleatorias independientes de dos poblaciones	27
2.1.1 Inferencias de muestras pequeñas	29
2.1.2 Inferencias de muestras grandes	34
2.2 Comparaciones apareadas	37
2.3 Comparación de dos proporciones binomiales	42
2.4 Comparando la varianza de dos poblaciones normales	47
2.5 Tamaño de muestra para comparar dos medias de dos poblaciones normales en función de la probabilidad de cometer los errores tipo I y II	54

2.6 Comparación de dos muestras usando la computadora	57
2.7 Ejercicios	65

Capítulo. 3

Diseños experimentales y análisis de varianza	70
3.1 Análisis de varianza en el diseño completamente al azar	73
3.2 Análisis de varianza en el diseño completamente al azar con igual número de repeticiones en los tratamientos	80
3.3 Comparación de tratamientos	81
3.3.1 Contrastes planeados	81
3.3.2 Contrastes ortogonales	88
3.3.3 Comparaciones múltiples	92
3.4 Verificando las suposiciones del análisis de varianza	94
3.4.1 Verificando el supuesto de homogeneidad de varianzas	94
3.4.1.1 Método gráfico	94
3.4.1.2 Pruebas estadísticas para diagnosticar homogeneidad de varianzas	96
3.4.2 Verificando el supuesto de normalidad	101
3.4.2.1 Pruebas gráficas de normalidad	101
3.4.2.2 Pruebas estadísticas de normalidad	102
3.4.3 Transformaciones que estabilizan la varianza	104

Capítulo. 4

Diseños que usan bloques	114
4.1 Concepto de bloque	114
4.2 Diseños en bloques aleatorizados completos	114
4.2.1 Aleatorización del diseño	115
4.2.2 Modelo estadístico y tabla de análisis de varianza	118
4.3 Bloques al azar generalizado	126
4.4 Diseño de cuadro latino	127
4.4.1 Aleatorización del diseño en cuadro latino	127
4.4.2 Modelo estadístico y análisis para diseños en cuadro latino	129
4.5 Ejercicios	135

Capítulo . 5

Análisis de experimentos con muestreo en las unidades

experimentales

	144	
5.1	Diseño completamente al azar con muestreo en las unidades experimentales	144
5.2	Diseño en bloques completos al azar con muestreo en las unidades experimentales	148
5.3	Diseño en cuadro latino con muestreo en las unidades experimentales	153
5.3.1	Algoritmo general para el análisis de diseños experimentales con igual tamaño de muestra en las unidades experimentales	154

Capítulo. 6

Experimentos factoriales

	162	
6.1	Características de los diseños factoriales	162
6.2	Notación y términos	164
6.3	Experimentos factoriales 2^n	166
6.3.1	Experimentos factoriales 2^2	167
6.3.2	Experimentos factoriales 2^3	174
6.3.3	Experimentos factoriales	183
6.4	Factoriales	186
6.4.1	Experimentos factoriales	187
6.5	Factoriales mixtos	199
6.6	Ejercicios de problemas diversos	211

Capítulo. 7

Diseño en parcelas divididas

	216	
7.1	Diseño completamente al azar en con diseño en parcelas divididas	216
7.2	Diseño en bloques completos al azar con diseño en parcelas divididas	222
7.3	Diseño en bloques completos al azar con diseño	

en parcelas subdivididas	229
7.4 Diseño en bloques divididos	230
7.5 Ejercicio	232

Capítulo. 8

Introducción al muestreo en la actividad agropecuaria	236
8.1 Definiciones básicas	236
8.2 Planeación de una encuesta	238
8.3 Usando las tablas de números aleatorios	239
8.4 Muestreo aleatorio simple sin reemplazo (o muestreo aleatorio irrestricto MAI)	240
8.4.1 Tamaño de muestra para estimar con MAI	241
8.4.2 Tamaño de muestra para estimar el total	243
8.4.3 Tamaño de muestra para estimar una proporción	244
8.5 Muestreo estratificado	244
8.5.1 Distribución afijación de la muestra a los estratos	249
8.5.2 Tamaño de muestra para estimar el total	252
8.5.3 Tamaño de muestra para estimar un promedio	252
8.5.4 Tamaño de muestra cuando se va a usar distribución proporcional	253
8.5.5 Tamaño de muestra para estimar el total considerando distribución normal	254
8.5.6 Tamaño de muestra para estimar la media considerando distribución normal	254
8.6 Muestreo por conglomerados	255
8.7 Estimadores de razón	260
8.8 Estimadores de regresión	266
8.9 Muestreo sistemático con inicio aleatorio	269
8.10 Muestreo con probabilidades proporcionales al tamaño	271
Apéndice	277

PRESENTACIÓN

La presente obra tiene el propósito de ofrecer al lector una introducción a los diseños experimentales y a las técnicas de muestreo de uso más frecuente en los trabajos de investigación en el campo agrícola y pecuario. Fue escrito con el doble propósito de servir de apoyo didáctico en cátedras de Experimentación Agropecuaria en Universidades e Institutos de Educación Superior a la vez de servir de referencia a investigadores dedicados al desarrollo científico en las ramas de las ciencias descritas. En tal virtud, los autores han unido esfuerzos representando a la Universidad Autónoma de Chapingo, Unidad Regional Universitaria de Zonas Áridas y al Instituto Nacional de Investigaciones Forestales Agrícolas y Pecuarias a través del Centro Nacional de Investigación Disciplinaria en Relaciones Agua Suelo Planta Atmósfera.

Los autores abordan de manera general los principios básicos que deben incluir la planeación, operación y análisis de trabajos de investigación. La presentación de los diversos temas se apoya con ejemplos resueltos utilizando los programas computacionales "SAS" (Statistical Analysis System) así como MINITAB.

El nivel teórico con el que los temas son tratados es elemental; sin embargo, se requiere que el lector posea las bases de un curso introductorio de inferencia estadística para su mejor comprensión.

Por el contenido y el enfoque del material expuesto, se espera que la presente obra sea de utilidad y ayude a comprender los aspectos conceptuales de la investigación aplicada en beneficio del sector económico primario.

Los autores desean hacer patente el reconocimiento al: Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología del Estado de Durango, al Instituto de Investigación por Cooperación de Francia, así como a sus Instituciones por el apoyo brindado para la realización de la presente obra a través de proyectos de investigación, convenios de colaboración y estancias de estudio que refuerzan los vínculos entre la docencia y la investigación en beneficio de los educandos e investigadores con impacto en la sociedad.

Enrique Santamaría César (UACH URUZA)
Marco A. Inzunza Ibarra (INIFAP CENID RASPA)
Ignacio Sánchez Cohen (INIFAP CENID RASPA)

CAPÍTULO 1

PRINCIPIOS BÁSICOS PARA LA PLANEACIÓN DE UNA INVESTIGACIÓN

Cualquier actividad asociada con la planeación y realización de estudios de investigación tienen implicaciones estadísticas. Los principios que se discuten en este capítulo constituyen la base para esa planeación de tal manera que la información que se obtenga, sea pertinente para el objetivo trazado en la investigación. Estos principios estadísticos permiten la obtención de muestras representativas que proporcionen la mayor cantidad de información para el estudio de investigación de una manera eficiente. Estos son: el control local de la variabilidad, el número de repeticiones (tamaño de muestra), la aleatorización y la eficiencia de los experimentos. Adicionalmente se presentan los conceptos de factores fijos y aleatorios; factores cruzados y anidados. Lo anterior se discute en el marco del modelo lineal mediante ejemplos de aplicación práctica.

Estos principios estadísticos fueron desarrollados de 1919 a 1925 por Ronald A. Fisher, quien trabajó en el análisis de trabajos relacionados con investigaciones agrícolas cerca de Harpenden, Inglaterra. Durante ese tiempo elaboró un extenso artículo en el que describe los tres componentes básicos de un experimento: control local de las condiciones de campo para reducir el error experimental, repeticiones como un medio para estimar la varianza del error experimental y la aleatorización para obtener una estimación válida de esa varianza. Dada la importancia de estos conceptos, serán tratados individualmente en la definición de conceptos básicos del diseño experimental.

1.1. Planeación de una investigación

Un programa de investigación es la planeación de los trabajos en tiempo y forma que ha de llevar a cabo un científico para adquirir conocimientos sobre un fenómeno natural o artificial que hasta el momento no se tienen. Este programa puede requerir varios estudios individuales, cada uno con sus objetivos específicos. Con frecuencia, éstos estudios individuales responden preguntas y proporcionan información que en conjunto satisfacen las metas del programa. El diseño y análisis de los estudios individuales de investigación son el objeto de este libro.

La planeación adecuada de un trabajo de investigación ayuda al científico a organizar las tareas necesarias y disminuye al máximo cualquier eventualidad que pueda ocasionar que se ponga en riesgo el objetivo del trabajo. Es necesario plasmar esta planeación por escrito. La consulta frecuente del mismo previene omisiones de importancia, así mismo es importante hacer anotaciones sobre el plan original de manera que queden registradas las alteraciones que tengan que efectuarse con respecto del plan original. Algunas especificaciones que deben ser incluidas en la planeación son:

- Justificación de la investigación: por qué es importante realizar esta investigación y a quién beneficia.
- Objetivos específicos del experimento.
- Hipótesis de trabajo.
- La característica a medir (¿cómo se va a medir el efecto?).
- Identificación de los factores que influyen en la característica de interés.
- Cuáles de esos factores se estudiarán en esta investigación.
- Procedimientos y equipo para realizar las pruebas o medir las características.
- Diseño experimental o de muestreo.
- Número de repeticiones del experimento básico.
- Cuál será la metodología de análisis.
- A partir de qué valor se considera importante un efecto.
- Recursos y materiales.

Algunas de estas especificaciones serán abordadas por separado en las siguientes secciones. Para empezar, a continuación se definen los principios básicos de un diseño experimental.

1.2. Repeticiones del experimento básico

Los propósitos de involucrar repeticiones son: 1) Proporcionar una estimación del error experimental que sirve como una unidad básica de medida que permite interpretar la importancia de las diferencias observadas o bien para determinar la amplitud de un intervalo de confianza. 2) Permite al investigador obtener una estimación más precisa del efecto medio de cualquier factor ya que el error estándar de \bar{Y} es $\sigma_{\bar{Y}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$; donde σ^2 representa el error experimental verdadero y n el número de repeticiones.

Un error que se comete con frecuencia es el de que múltiples lecturas de una característica no necesariamente son reproducciones verdaderas. Esta afirmación se ilustra con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1. En un estudio sobre raciones en la dieta de animales se tiene un corral con cuatro animales sometidos a la ración A y otro con cuatro más alimentados con la ración B. Al final del experimento se toman las medidas necesarias en cada animal.

Es frecuente que se pretenda comparar las raciones mediante una prueba de t ; sin embargo esta prueba está basada en el supuesto de repeticiones independientes. En un experimento como el descrito se presenta la posibilidad de que la diferencia observada en el efecto de las raciones se deba también al "factor corral". En éstas condiciones el experimento no resuelve la pregunta de si difieren las dos raciones en su efecto sobre el aumento de peso en los animales. El experimento no tiene repeticiones verdaderas Figura 1.1.

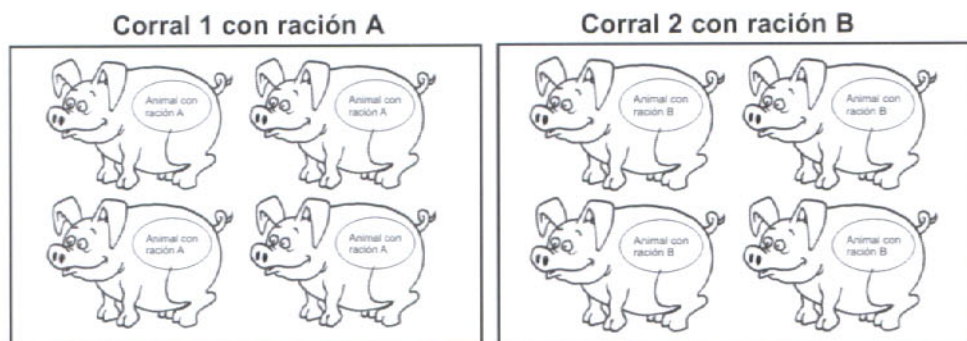


Figura 1.1. Ilustración de un experimento sin repeticiones.

Ejemplo 1.2. Suponga que el experimento del ejemplo anterior se modifica de manera que los animales se dividen de manera aleatoria en cuatro corrales de dos animales cada uno. Se supone que los ocho animales son homogéneos en los factores que se sabe pueden influir en la característica de interés tales como: peso inicial, raza, edad e índice de masa corporal, entre otros. Una vez asignados los animales a los corrales, las dos raciones se asignan al azar a los dos corrales. El esquema del experimento modificado se muestra en la Figura 1.2.

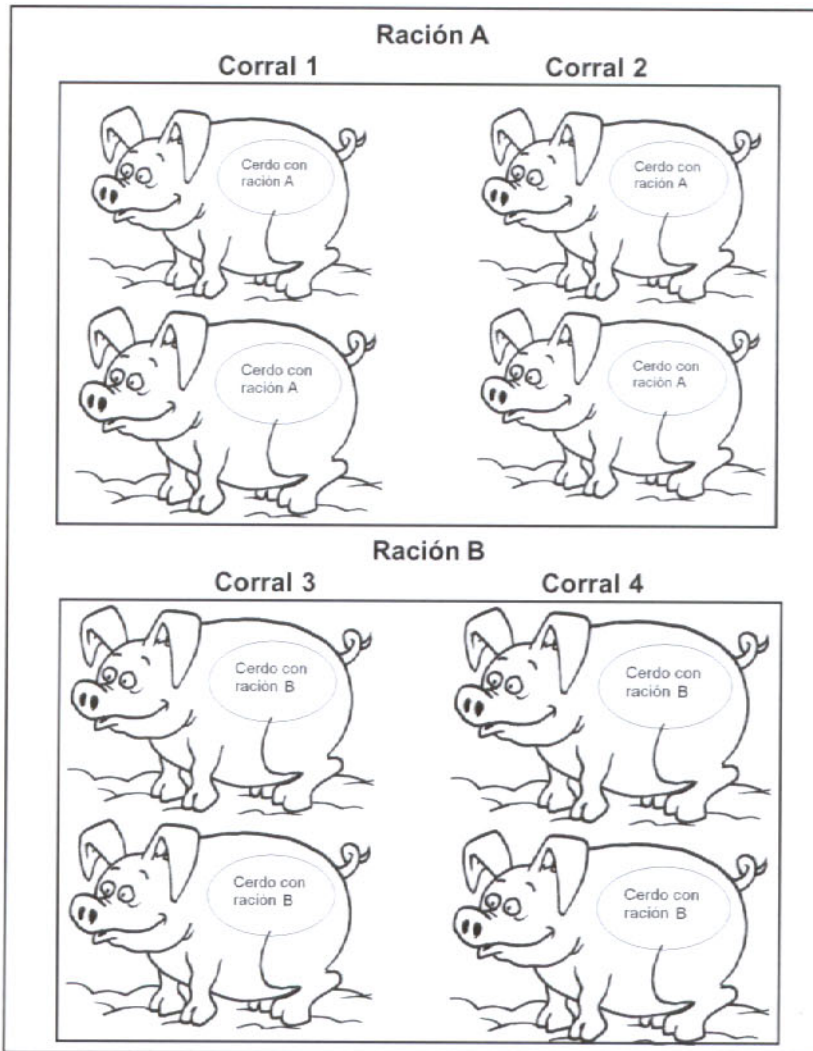


Figura 1.2. Ilustración de un experimento con repeticiones.

En el ejemplo 1.2 cada ración cuenta con una repetición verdadera. Las unidades experimentales son los corrales en los que se administran las raciones independientes (dos corrales por ración) y los animales dentro de los corrales son las unidades de observación. Entonces, la respuesta de la unidad experimental es el promedio de la respuesta del corral.

La estimación de la varianza de error experimental, s^2 , calculada como la varianza entre las medias de los corrales dentro de cada ración es la varianza adecuada para la prueba de t de Student. La varianza entre los animales de cada corral, digamos s_w^2 , es una medida de la variabilidad en las unidades de observación dentro de las réplicas de corral. Es importante distinguir qué unidades del experimento constituyen la unidad experimental y en consecuencia, qué unidades constituyen una verdadera repetición del experimento.

1.3. Error experimental y unidades experimentales

En los dos ejemplos anteriores se usaron los términos error experimental y unidad experimental. Debido a su extenso uso, es necesario tener un claro entendimiento de su significado. Una unidad experimental, es la unidad a la que se le aplica un solo tratamiento (que puede ser una combinación de varios factores) en una reproducción del experimento básico. El término error experimental describe la variación entre las unidades experimentales tratadas de manera idéntica e independiente. Los distintos orígenes del error experimental son:

- La variación natural entre unidades experimentales.
- La variabilidad en las mediciones de la respuesta.
- La imposibilidad de reproducir las condiciones del tratamiento con fidelidad de una unidad a otra.
- Interacción de las unidades experimentales con los tratamientos.
- Errores de observación.
- Errores de medición.
- Errores de experimentación.
- Factores externos que influyen en las características medidas.

Un objetivo del análisis estadístico es lograr una estimación de la varianza del error experimental.

1.3.1. Recomendaciones generales para reducir el error experimental

El error experimental puede reducirse normalmente adoptando una o más de las siguientes técnicas:

- Usando material experimental más homogéneo o por la estratificación cuidadosa del material disponible.
- Usando información proporcionada por variables aleatorias relacionadas (covariables).
- Teniendo más cuidado al dirigir el experimento.
- Usando un diseño experimental más eficiente.

1.4. Aleatorización

Una de las suposiciones fundamentales para la interpretación de los resultados de un experimento es que las observaciones (o los errores en ellas) estén distribuidas independientemente. No es posible probar el supuesto de independencia, sin embargo, la asignación aleatoria de los tratamientos a las unidades experimentales permite al investigador asumir que sus observaciones cumplen ese supuesto. Es decir, la aleatorización hace válido el análisis estadístico. Debe quedar claro que la aleatorización no garantiza independencia, sino sólo que permite proceder como si la independencia fuera un hecho. Lo anterior se subraya debido a que los errores asociados con unidades experimentales adyacentes en espacio o tiempo tenderán a correlacionarse y lo que hace la aleatorización es solamente asegurar que el efecto de esta correlación, sobre cualquier comparación entre los tratamientos, se hará tan pequeño como sea posible.

En la actualidad el uso de las computadoras permite ejecutar la aleatorización de una manera cómoda y eficiente.

Ejemplo 1.3. Supóngase que se va a realizar un experimento en campo para comparar el rendimiento de tres variedades de cebada que denotaremos con las letras: A, B y C. Se cuenta con 13 unidades experimentales homogéneas y de dimensiones apropiadas. Para poder asumir observaciones independientes se deben asignar aleatoriamente las tres variedades a las unidades experimentales. Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Identificar con los dígitos del 1 al 13 las unidades experimentales.
2. Utilizando un algoritmo que simula números aleatorios extraídos de una distribución uniforme continua, obtener una secuencia de 13 números.

3. A cada número extraído se le asigna su número de orden de menor a mayor. Se obtiene así una permutación aleatoria de los primeros 13 números enteros.

El resultado que se obtiene al realizar los pasos 2 y 3 con un programa en SAS es el siguiente:

```
DATA ALEATORI;  
DO I = 1 TO 13;  
W=RANUNI(123);  
OUTPUT; END;  
PROC RANK DATA= ALEATORI; VAR W;  
RANKS RW;  
PROC PRINT; VAR W RW;  
RUN;
```

Obs	Sistema SAS	
	W	RW
1	0.75040	9
2	0.32091	5
3	0.17839	2
4	0.90603	12
5	0.35712	6
6	0.22111	4
7	0.78644	11
8	0.39808	7
9	0.12467	1
10	0.18769	3
11	0.77618	10
12	0.43607	8
13	0.96750	13

4. Si se decide que las variedades A, B y C se ensayaran en 4, 4 y 5 unidades experimentales respectivamente, se asigna la variedad A a las parcelas marcadas con los números 9, 5, 2 y 12; la variedad B a las parcelas 6, 4, 11 y 7; y la variedad C se asigna a las parcelas restantes. El esquema de la asignación aleatoria queda como se muestra en la Figura 1.3.

1	2	3	4	
C	A	C	B	
5	6	7	8	
A	B	B	C	
9	10	11	12	13
A	C	B	A	C

Figura 1.3. Esquema de la asignación aleatoria del experimento de cebada.

1.5. Número de repeticiones del experimento básico

Los datos previos que se deben tener para calcular el número de repeticiones del experimento básico son: el poder de la prueba deseado, es decir, la sensibilidad que deseamos tenga la prueba para detectar las diferencias entre las medias de tratamientos y el nivel α de significancia. Por supuesto, el número de repeticiones está limitado al presupuesto del proyecto.

La ecuación que se propone para calcular el número de repeticiones resulta de la comparación de dos tratamientos por lo tanto, al aplicarse a más de dos tratamientos se convierte en solo una aproximación; sin embargo en general resulta en una buena aproximación.

Ecuación para calcular el tamaño de muestra para comparar dos medias.

$$n \geq \frac{2s^2 \left[z_{\alpha/2} + z_{\beta} \right]^2}{\delta^2} \quad \text{Ecuación (1.1)}$$

Donde:

s^2 = Es el cuadrado medio del error en estudios previos o similares al presente.

δ = Es la magnitud de la diferencia que se desea detectar entre dos medias de tratamientos. Delimita un error II de importancia práctica.

$z_{\alpha/2}$ = Es el cuantil de la distribución normal estándar que está en función del nivel de significancia α deseado.

z_{β} = Es el cuantil de la distribución normal estándar que está en función de la probabilidad de cometer error II. La probabilidad de cometer error II se denota por β . La potencia de la prueba es entonces (probabilidad de rechazar H_0 cuando ésta es falsa).

Para evitar el problema que se origina por el uso de diversas unidades de medida para la variable respuesta, $1 - \beta$ se utiliza el coeficiente de variación (CV) que es una cantidad adimensional.

Si $CV = \frac{s}{y} \times 100$ haciendo: $\delta^* = \frac{\delta}{y} \times 100$

La ecuación 1.1 se transforma en la ecuación que puede ser usada en la etapa de planeación de un experimento.

$$n \geq \frac{2(CV)^2 \times \left[z_{\alpha/2} + z_{\beta} \right]^2}{(\delta^*)^2} \quad \text{Ecuación (1.2)}$$

Obsérvese que el número de repeticiones necesario aumenta si.

- La varianza o el coeficiente de variación C.V. aumenta.
- Si la magnitud de la diferencia que se desea detectar disminuye.
- Si el nivel de significancia de la prueba α disminuye.
- Si la potencia de la prueba $1 - \beta$ aumenta.

1.6. Control local del error experimental

El control local se refiere a la cantidad de balanceo, bloqueo y agrupamiento de las unidades experimentales que se emplean en el diseño estadístico adoptado. Su función es hacer el diseño experimental más eficiente. Es decir, el control local hace más potente o sensible los procedimientos de prueba. Este aumento de la potencia se debe a que el uso adecuado del control local reduce la magnitud de la estimación del error experimental. Los métodos generales para ejercer el control local ya fueron mencionados en el apartado 1.3.1. Se discute a continuación el concepto de bloqueo.

1.6.1. Bloqueo

El bloqueo proporciona control local del ambiente para reducir el error experimental. Las unidades experimentales se agrupan de manera que la variabilidad dentro de los bloques sea menor que entre las unidades experimentales antes de agruparlas. Los bloques se constituyen con unidades experimentales similares en base al factor o factores que tienen alguna relación con la variable respuesta.

Objetivos básicos del bloqueo:

- Reducir el error experimental.
- Acercar los errores a las propiedades supuestas de normalidad y homogeneidad de varianzas.
- Controlar factores de confusión.

Criterios para bloquear:

- Proximidad (parcelas vecinas).
- Características físicas (edad, peso, raza, fertilidad del suelo, vigor, etc.).
- Tiempo. Los días son unidades de bloqueo conveniente solo si se puede cultivar en el campo o procesar en el laboratorio una repetición del experimento básico durante un solo día.
- Administración de las tareas del experimento. Los bloques se usan para dividir el experimento en unidades de tamaño razonable para administrar de manera uniforme las tareas. Los técnicos pueden (deben) servir como unidades de bloqueo para evitar confundir la variabilidad del técnico que toma lecturas con la de los tratamientos.

1.7. El análisis de covarianza

El uso de variables relacionadas con la variable respuesta (covariables) tiene los mismos objetivos básicos del bloqueo, pero adicionalmente explica la influencia de los tratamientos sobre la variable respuesta a través de la covariable. Ejemplos de covariable son: La fertilidad de las parcelas, la cosecha del año anterior en cultivos perennes, el peso y la edad de animales al iniciar el experimento, etc. Cualquier atributo medible que pueda tener una relación lineal con la característica de interés es un candidato para usarse como covariable. No conviene que la covariable esté afectada por los tratamientos.

Ejemplo 1.4. En un experimento de maíz, la unidad experimental tiene cierto número de plantas, pero debido al azar se modifica el número de plantas por unidad experimental. En esas condiciones se debe realizar un análisis de varianza para la covariable y si sale significativo el factor tratamientos, entonces la covariable está afectada por tratamientos. En caso de que la covariable esté afectada por los tratamientos, entonces hay que tener cuidado con las recomendaciones o conclusiones que se dan.

Ejemplo 1.5. Suponga que la variedad de maíz (A) tiene más sensibilidad a ciertas condiciones ambientales bajo las cuales se está probando y a esto se debe que baje el número de plantas por unidad experimental. Entonces si se corrige su producción experimental por número de plantas es posible que esta variedad resulte la más recomendable desde el punto de vista de la producción; pero en la práctica tiende a reducir su población y origina baja producción. El análisis de covarianza sigue siendo válido porque explica que la variedad (A), bajo las condiciones del experimento, produce menos debido a que pierde población, pero las plantas que sobreviven, en promedio, producen más que las plantas de otras variedades.

Es muy recomendable el análisis de covarianza en experimentos con plantas perennes y con animales.

1.8. Factores fijos y aleatorios

Cuando se especifica un modelo de diseño experimental es necesario definir la naturaleza de los niveles de los factores. Así el investigador, de acuerdo a los objetivos de la investigación, decide si los niveles de un factor, que se estudia en un experimento, son todos los que interesan. Si este es el caso, entonces se habla de un modelo de efectos fijos. Si por el contrario, el investigador no está interesado en un conjunto de tratamientos en particular, y selecciona para su investigación una muestra aleatoria de una población teórica de niveles posibles, entonces se tiene un modelo de efectos aleatorios.

Para definir si un efecto es fijo o aleatorio, importa el sentido utilitario del diseño experimental. Si las conclusiones del experimento se aplican únicamente a los niveles de un

factor incluidos en el experimento, éstos se consideran fijos. Si las conclusiones se quieren extender a muchos niveles del factor (población de niveles del factor), entre los cuales se seleccionaron al azar los niveles probados en el experimento, se trata de efectos aleatorios.

Ejemplo 1.6 Interesa investigar la capacidad de adaptación en una especie vegetal de una zona amplia. Aquí el factor lugares es aleatorio porque sería imposible pretender investigar la capacidad de adaptación en toda el área de interés.

Ejemplo 1.7 En un programa de mejoramiento genético se requiere investigar la capacidad que tiene un toro de heredar en sus hijas el carácter producción de leche. Entonces las vacas (sus hijas) que se van a estudiar es una muestra aleatoria "realizada por la naturaleza" y son las vacas que se estudian.

1.9. Factores cruzados o anidados

En los diseños experimentales existen situaciones en las que se estudian varias poblaciones en una jerarquía de grados de generalidad, de modo que ciertas poblaciones se consideran constituyentes de otras con un grado de generalidad mayor. Estos diseños se conocen diseños como jerárquicos o anidados.

Se dice que un factor B está anidado en A, si los niveles de B cambian su significado al cambiar los niveles de A. En este caso la interacción entre A y B no tiene sentido.

Se dice que un factor B está cruzado con A, si los niveles de B no cambian su significado al cambiar los niveles de A. En este caso la interacción sí tiene sentido.

Ejemplo 1.8 Para estudiar la heredabilidad de ciertos caracteres en el ganado vacuno, cada uno de los miembros del conjunto de sementales cubre a un grupo de hembras, las hembras están anidadas dentro de toros.

Ejemplo 1.9 En un estudio de concentración de calcio en las hojas de los árboles, se considera una población de mediciones de calcio en hojas de varios árboles; las correspondientes a cada árbol constituyen una población con cierto contenido de calcio en promedio; además en cada hoja se pueden hacer varias determinaciones de calcio, considerando que en cada una se tiene una población de determinaciones al grado de generalización más bajo. En la situación descrita, el factor hoja está anidado dentro de árbol y las determinaciones de calcio están anidadas dentro de hoja y árbol.

El modelo lineal del experimento descrito es el siguiente:

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_j + \delta_{k(j)} + \varepsilon_{i(jk)}$$

Donde:

Y_{ijk} es la i -ésima determinación de calcio efectuada en la k -ésima hoja del árbol j -ésimo; μ es la media general de la población a mayor grado de generalización que abarca las determinaciones en todas las hojas de los árboles considerados; T_j es el efecto del árbol j -ésimo. Es común considerar a este efecto como aleatorio, significa que T_j es una variable aleatoria con media cero y varianza σ^2 a la que se denomina un "componente de varianza" del modelo. $\delta_{k(j)}$ es el efecto de la k -ésima hoja dentro del árbol j -ésimo; $\varepsilon_{i(jk)}$ es el error asociado a la i -ésima determinación en la hoja k -ésima del árbol j -ésimo. Se considera que $\varepsilon_{i(jk)} \sim N(0, \sigma^2)$.

Ejemplo 1.10 Se realizó un experimento sobre nutrición en cerdos que involucra tres razas de interés que es el factor A. Habrá 15 camadas representativas de 6 cerditos cada una y de cada raza (45 camadas de 6 cerditos cada una). Además se asignaron aleatoriamente 6 dietas a los cerditos de cada camada. La variable respuesta es el incremento de peso de los animales.

El diagrama del experimento es el siguiente:

		Raza 1				Raza 2				Raza 3			
Camada		1	2	..	15	1	2	..	15	1	2	..	15
Dieta	1												
	2												
	3												
	4												
	5												
	6												

- El factor raza es un efecto fijo porque se seleccionaron los de interés.
- El factor camada es un efecto aleatorio porque se seleccionaron camadas representativas de cada raza de interés.
- Las camadas están anidadas dentro de raza. Nótese que no tiene sentido la interacción entre camada y raza, ni cualquier otra que involucre al factor camada.

- El factor dieta es fijo, ya que es el que seleccionó el investigador basado en alguna razón que bien puede ser subjetiva.
- El factor dieta está cruzado con raza y además está cruzado con camada.

Se considera que todos los cerditos se pueden manejar homogéneamente.

No existen repeticiones verdaderas. Esta condición es muy frecuente en los diseños experimentales y se refleja en el modelo lineal introduciendo un índice al que se le asigna la unidad; esto le da generalidad al modelo.

El modelo lineal del experimento descrito es el siguiente:

$$Y_{ijk} = \mu + R_i + C_{j(i)} + D_k + (RD)_{ik} + (CD)_{jk(i)} + \varepsilon_{l(ijk)}$$

$$i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, \dots, 15; \quad k = 1, 2, \dots, 6; \quad l = 1$$

Y_{ijk} es la observación en incremento de peso atribuible a la k -ésima dieta efectuada en la j -ésima camada de la raza i -ésima; μ es la media general de la población de incrementos de peso que abarca a todas las raciones alimenticias y razas consideradas; R_i es el factor raza, es un factor fijo porque se seleccionaron las de interés; $C_{j(i)}$ es el factor camada, es un factor aleatorio porque se seleccionaron camadas representativas de cada raza de interés.

Este factor está anidado en raza.

D_k es el factor dieta, es un factor fijo; $(RD)_{ij}$ es la interacción entre raza y dieta; $(CD)_{jk(i)}$ es la interacción camada dieta. Nótese que este efecto está anidado en raza ya que el factor camada lo está. $\varepsilon_{l(ijk)}$ es el término de error, en el que $l = 1$, y se considera $\varepsilon_{l(ijk)} \sim N(0, \sigma^2)$.

1.10 Construcción de la tabla de análisis de varianza en diseños completos balanceados

1. Habrá tantos renglones en la tabla del análisis de varianza (A de V) como términos en el modelo.
2. La primera columna contiene los símbolos de las fuentes de variación (FV). La segunda columna contiene el producto simbólico que es una expresión que sirve para calcular los grados de libertad de cada fuente de variación y, además, sirve para encontrar la expresión para la suma de cuadrados (SC) correspondiente. Esta columna desaparece una vez que ha cumplido con su función.
3. Construcción del producto simbólico. Este producto se construye tomando los índices que están fuera del paréntesis y restándoles la unidad, a los índices dentro del paréntesis no se les resta nada. Se multiplican los términos resultantes. Los grados de libertad se obtienen al sustituir cada índice en el producto simbólico por el número de niveles que alcanza dicho índice.
4. Obtención de las sumas de cuadrados. Se obtienen tantos totales como términos tiene el producto simbólico. Cada total está indexado por los índices de cada término en el producto simbólico. La ausencia de índices se interpreta como el gran total. Se elevan al cuadrado los totales y se divide cada total entre el número de observaciones simples que lo integran. Finalmente se suman los totales sobre los índices que tiene.
5. Para ratificar cada término, verifique que cada suma de cuadrados debe involucrar a todas las observaciones del experimento.

Ejemplo 1.11 La construcción de la tabla del A de V para el experimento del ejemplo 1.10 es la siguiente:

FV	Producto simbólico	GL	SC
Raza R_i	$i - 1$	2	$\sum_{i=1}^3 \frac{Y^2_{i\dots}}{90} - \frac{Y^2_{\dots}}{270}$
Camada $C_{j(i)}$	$(j-1)i = ij - i$	42	$\sum_{j=1}^{15} \sum_{i=1}^3 \frac{Y^2_{ij\dots}}{6} - \sum_{i=1}^3 \frac{Y^2_{i\dots}}{90}$
Dieta D_k	$k - 1$	5	$\sum_{k=1}^6 \frac{Y^2_{\dots k}}{45} - \frac{Y^2_{\dots}}{270}$
$(RD)_{ik}$	$(i-1)(k-1) =$ $ik - i - k + 1$	10	$\sum_{k=1}^6 \sum_{i=1}^3 \frac{Y^2_{i\dots k}}{15} - \sum_{i=1}^3 \frac{Y^2_{i\dots}}{90} -$ $\sum_{k=1}^6 \frac{Y^2_{\dots k}}{45} + \frac{Y^2_{\dots}}{270}$
$(CD)_{j(k)}$	$(j-1)(k-1)i =$ $(jk - j - k + 1)i =$ $ijk - ij - ik + i$	210	$\sum_k^6 \sum_j^{15} \sum_i^3 Y^2_{ijk\dots} - \sum_j^{15} \sum_i^3 \frac{Y^2_{ij\dots}}{6} -$ $\sum_k^6 \sum_i^3 \frac{Y^2_{i\dots k}}{15} + \sum_{i=1}^3 \frac{Y^2_{i\dots}}{90}$
Error $\varepsilon_{l(ijk)}$	$(l-1)ijk =$ $ijkl - ij^k$	0	
Total	$ijkl - 1$	269	$\sum_l^1 \sum_k^6 \sum_j^{15} \sum_i^3 Y^2_{ijkl} - \frac{Y^2_{\dots}}{270}$

1.11 Reglas para obtener las esperanzas de los cuadrados medios en diseños completos balanceados

1. En cada hilera del A de V se escriben los componentes de varianza que tienen todos los subíndices contenidos en los subíndices del factor en la hilera.

2. Se determina qué subíndices no están presentes en cada componente de varianza, se multiplica el coeficiente de ese componente por el tamaño de muestra (número de niveles) de los factores correspondientes a los subíndices faltantes.
3. Sea h el número de niveles de un factor H . Donde H es el número de niveles en la población de interés. $H = h$ en efectos fijos, y $H = \infty$ en efectos aleatorios.

El término $\left(1 - \frac{h}{H}\right)$ multiplica a los componentes para cada factor H que:

- a) Está en el subíndice del componente de varianza.
- b) No aparece en paréntesis.
- c) No se haya en el encabezado de la hilera.

Nota. No se aplica esta regla al error.

Ejemplo 1.12 Considérese el experimento planteado en el ejemplo 1.10 cuyo modelo lineal es:

$$Y_{ijk} = \mu + R_i + C_{j(i)} + D_k + (RD)_{ik} + (CD)_{jk(i)} + \varepsilon_{l(ijk)}$$

$$i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, \dots, 15; \quad k = 1, 2, \dots, 6; \quad l = 1$$

Factores fijos: Raza y Dieta.

Factores aleatorios: Camada y el error.

Obtención de las esperanzas de los cuadrados medios:

Paso 1

FV	Componentes de varianza
Raza R_i	$\sigma^2 \mathcal{E} + \sigma^2_{CD} + \sigma^2_{RD} + \sigma^2_C + \sigma^2_R$
Camada $C_{j(i)}$	$\sigma^2 \mathcal{E} + \sigma^2_{CD} + \sigma^2_C$
Dieta D_k	$\sigma^2 \mathcal{E} + \sigma^2_{CD} + \sigma^2_{RD} + \sigma^2_D$
$(RD)_{ik}$	$\sigma^2 \mathcal{E} + \sigma^2_{CD} + \sigma^2_{RD}$
$(CD)_{jk(i)}$	$\sigma^2 \mathcal{E} + \sigma^2_{CD}$
Error $\mathcal{E}_{l(i\bar{y}k)}$	$\sigma^2 \mathcal{E}$
Total	

Paso 2

FV	Componentes de varianza
Raza R_i	$\sigma^2 \mathcal{E} + \sigma^2_{CD} + 15\sigma^2_{RD} + 6\sigma^2_C + 90\sigma^2_R$
Camada $C_{j(i)}$	$\sigma^2 \mathcal{E} + \sigma^2_{CD} + 6\sigma^2_C$
Dieta D_k	$\sigma^2 \mathcal{E} + \sigma^2_{CD} + 15\sigma^2_{RD} + 45\sigma^2_D$
$(RD)_{ik}$	$\sigma^2 \mathcal{E} + \sigma^2_{CD} + 15\sigma^2_{RD}$
$(CD)_{jk(i)}$	$\sigma^2 \mathcal{E} + \sigma^2_{CD}$
Error $\mathcal{E}_{l(i\bar{y}k)}$	$\sigma^2 \mathcal{E}$
Total	

Paso 3

FV	Componentes de varianza
Raza R_i	$\sigma^2 \varepsilon + \left(1 - \frac{c}{C}\right) \left(1 - \frac{d}{D}\right) \sigma^2_{CD} + \left(1 - \frac{d}{D}\right) 15 \sigma^2_{RD} + \left(1 - \frac{c}{C}\right) 6 \sigma^2_C + 90 \sigma^2_R$
Camada $C_{j(i)}$	$\sigma^2 \varepsilon + \left(1 - \frac{d}{D}\right) \sigma^2_{CD} + 6 \sigma^2_C$
Dieta D_k	$\sigma^2 \varepsilon + \left(1 - \frac{c}{C}\right) \sigma^2_{CD} + \left(1 - \frac{r}{R}\right) 15 \sigma^2_{RD} + 45 \sigma^2_D$
$(RD)_{\hat{k}}$	$\sigma^2 \varepsilon + \left(1 - \frac{c}{C}\right) \sigma^2_{CD} + 15 \sigma^2_{RD}$
$(CD)_{\hat{k}(i)}$	$\sigma^2 \varepsilon + \sigma^2_{CD}$
Error $\varepsilon_{l(i\hat{k})}$	$\sigma^2 \varepsilon$
Total	

FV	Componentes de varianza
Raza R_i	$\sigma^2 \varepsilon + \left(1 - \frac{c}{\infty}\right) \left(1 - \frac{d}{d}\right) \sigma^2_{CD} + \left(1 - \frac{d}{d}\right) 15 \sigma^2_{RD} + \left(1 - \frac{c}{\infty}\right) 6 \sigma^2_C + 90 \sigma^2_R$
Camada $C_{j(i)}$	$\sigma^2 \varepsilon + \left(1 - \frac{d}{d}\right) \sigma^2_{CD} + 6 \sigma^2_C$
Dieta D_k	$\sigma^2 \varepsilon + \left(1 - \frac{c}{\infty}\right) \sigma^2_{CD} + \left(1 - \frac{r}{r}\right) 15 \sigma^2_{RD} + 45 \sigma^2_D$
$(RD)_{\bar{k}}$	$\sigma^2 \varepsilon + \left(1 - \frac{c}{\infty}\right) \sigma^2_{CD} + 15 \sigma^2_{RD}$
$(CD)_{\bar{j}(i)}$	$\sigma^2 \varepsilon + \sigma^2_{CD}$
Error $\varepsilon_{l(i\bar{j}\bar{k})}$	$\sigma^2 \varepsilon$
Total	

FV	GL	Esperanzas de cuadrados medios
Raza R_i	2	$\sigma^2 \varepsilon + 6 \sigma^2_C + 90 \sigma^2_R$
Camada $C_{j(i)}$	42	$\sigma^2 \varepsilon + 6 \sigma^2_C$
Dieta D_k	5	$\sigma^2 \varepsilon + \sigma^2_{CD} + 45 \sigma^2_D$
$(RD)_{ik}$	10	$\sigma^2 \varepsilon + \sigma^2_{CD} + 15 \sigma^2_{RD}$
$(CD)_{\bar{j}(i)}$	210	$\sigma^2 \varepsilon + \sigma^2_{CD}$
Error $\varepsilon_{l(i\bar{j}\bar{k})}$	0	$\sigma^2 \varepsilon$
Total		

La información contenida en esta tabla puede se usada para la obtención de los estimadores de los componentes de varianza.

Ejemplo 1.13 A continuación se obtiene el estimador de σ^2_R .

$$CM_R = \hat{\sigma}^2 \varepsilon + \hat{\sigma}^2_C + 90\hat{\sigma}^2_R$$

$$CM_{C|R} = \hat{\sigma}^2 \varepsilon + 6\hat{\sigma}^2_C$$

Por diferencia: $CM_R - CM_{C|R} = 90\hat{\sigma}^2_R$

Despejando $\hat{\sigma}^2_R$:
$$\hat{\sigma}^2_R = \frac{CM_R - CM_{C|R}}{90}$$

También sirve para determinar las pruebas de F :

Sea $H_0 : E(CM_1) = E(CM_2)$ vs $H_1 : E(CM_1) > E(CM_2)$

La estadística de prueba para probar H_0 :

$$F_{cal} = \frac{CM_1}{CM_2} \text{ Que bajo } H_0 : \text{ tiene distribución } F_{GL_{CM_1}, GL_{CM_2}}$$

Ejemplo 1.14

Para probar $H_0 : \sigma^2_R = 0 \Leftrightarrow$ No hay efecto de raza $\Leftrightarrow E(CM_R) = E(CM_C)$

vs $H_1 : E(CM_R) > E(CM_C)$

La estadística de prueba es:

$$F_{cal} = \frac{CM_R}{CM_C} \sim F^2_{42, GL, \alpha}$$

REFERENCIAS

- Box, G. E. P., Hunter, W. G. y Hunter, J. S., 1993. *Estadística Para Investigadores*. ED. Reverté – Wiley. España. 667 p.
- Méndez, R. I. 1976. *Modelos Estadísticos Lineales*, 1ª Edición. Fondo de Ciencia y Cultura Audiovisual A. C. / CONACYT. México. 140 p.
- Méndez, R. I. 1990. *La Estadística como Herramienta de Investigación en Agronomía*, Departamento de Estadística, IIMAS – UNAM. México. 11 p.
- Méndez, R. I. 1981. *Modelos Mixtos y Aleatorios en el Diseño y Análisis de Experimentos*, Departamento de Estadística, IMAS – UNAM. México. 72 p.
- Ostle, B. 1965. *Estadística Aplicada*, Limusa-Wiley. México. 629 p.

CAPÍTULO 2

INFERENCIAS SOBRE DOS POBLACIONES

En este capítulo se inicia con los métodos de investigación que han permitido encontrar nuevas tecnologías o modificar y adaptar las ya existentes en prácticamente todas las áreas de la actividad humana. La exploración de nuevos métodos ya sea en el campo de la producción agropecuaria, la conservación de los recursos naturales, el cuidado de la salud o la producción industrial, juega un rol de capital importancia en la solución de los diversos problemas inherentes al crecimiento de las sociedades humanas. Para decidir acerca de cuál de dos o más técnicas se adaptan mejor a la solución de determinado problema, se deben realizar experimentos, coleccionar datos y realizar inferencias de la evidencia experimental. La influencia de los métodos estadísticos se percibe de inmediato, porque proporcionan una base lógica para la evaluación de la evidencia experimental, así como para planear procesos efectivos para la colección de datos. Ahora se abordará el problema de comparar dos técnicas o tratamientos y se procederá a explicar los conceptos estadísticos básicos plasmados en los siguientes incisos:

- (a) La manera de conducir el experimento para obtener bases válidas para la comparación.
- (b) Métodos de análisis de datos para probar si una diferencia real existe y estimar la magnitud de ésta.

Ejemplo 2.1 Experimentos en el área agrícola: Se desea investigar si una nueva variedad de semillas desarrolladas mediante cruce genética produce mejores rendimientos por hectárea con respecto a la mejor variedad existente en una región. Se deben realizar ensayos en campo en los que se siembran las dos variedades y se conducen bajo idénticas condiciones en las que se quiere establecer la comparación. Los rendimientos de las parcelas son la base para hacer la comparación. Por supuesto, puede ser de interés establecer la comparación con diversos criterios como por ejemplo: resistencia a enfermedades, requerimientos de fertilización o propiedades deseables para su comercialización.

Ejemplo 2.2 Experimentos en el área pecuaria. En el proceso de curtido de pieles se utilizan productos en los que se sumerge el cuero durante cierto tiempo en su fase final. Aunque el producto corriente en el mercado produce resultados satisfactorios, se presenta la oportunidad de sustituirlo por otro que es considerablemente más barato. Sin embargo se sospecha que el nuevo producto puede afectar las características de resistencia a la tracción.

El gerente del proceso decide cambiar solo si existe evidencia experimental de que el nuevo producto no reduce la resistencia a la tracción. Para ello, se toman 20 porciones de cuero de calidad y características generales lo más parecidas posible, y aleatoriamente se asignan 10 para ser tratadas con el producto actualmente en el mercado y las otras 10 con el nuevo producto.

Los anteriores son solo dos ejemplos de la comparación de dos poblaciones; en general en este libro se usará el término tratamiento para hacer alusión a cada población de interés en una investigación. En un experimento, cada unidad básica que se expone a un determinado tratamiento se denomina unidad experimental, y a la característica que se registra en ella después de haber aplicado el tratamiento se le denomina respuesta. En el ejemplo 2.1 la unidad experimental es la parcela en la que se ensaya una variedad, es necesario ensayar en más de una unidad experimental cada variedad; los tratamientos son las variedades que se pretende comparar y la respuesta es el rendimiento por unidad experimental. En el ejemplo 2.2 la unidad experimental es la porción de cuero, de manera que se dedican 10 unidades experimentales para cada producto; los tratamientos son los productos y la respuesta es la resistencia a la tracción.

La manera en la que se asignan los tratamientos a las unidades experimentales se denomina diseño experimental. Es de gran importancia la planeación del diseño experimental que produce una comparación válida entre los tratamientos. Dos características básicas de una buena planeación experimental son:

- (a) La asignación aleatoria de los tratamientos a las unidades experimentales.
- (b) Bloquear posibles factores de confusión mediante el concepto de unidades experimentales apareadas.

Estas dos ideas serán discutidas en las siguientes secciones.

2.1 Muestras aleatorias independientes de dos poblaciones

Con el objeto de realizar una comparación entre dos poblaciones o sinónimamente, de dos tratamientos, y decidimos tomar una muestra aleatoria de tamaño n_1 de la población 1 y de tamaño n_2 de la población 2. Los datos son las mediciones de las respuestas asociadas con el siguiente diseño experimental. Una colección de $n_1 + n_2$ unidades experimentales de características similares se dividen aleatoriamente en n_1 y n_2 . Cada miembro del primer grupo recibe el tratamiento 1, y cada miembro del segundo grupo recibe el tratamiento 2. En símbolos tenemos el siguiente panorama:

Muestra	Estadística
De la población 1 X_1, X_2, \dots, X_n	$\bar{X} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i, \quad s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2}{n_1 - 1}$
De la población 2 Y_1, Y_2, \dots, Y_n	$\bar{Y} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} Y_i, \quad s^2_2 = \frac{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}{n_2 - 1}$

Específicamente, en el contexto de la inferencia estadística, estamos interesados en hacer inferencias respecto al siguiente parámetro:

$$(\text{media de la población 1}) - (\text{media de la población 2}) = \mu_1 - \mu_2$$

Cualquier inferencia respecto al parámetro anterior debe estar basada en las siguientes suposiciones:

Suposiciones básicas: muestras aleatorias independientes

- (a) X_1, X_2, \dots, X_{n_1} es una muestra aleatoria de tamaño n_1 de la población 1 cuya media es μ_1 y cuya varianza es σ_1^2 .
- (b) Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} es una muestra aleatoria de tamaño n_2 de la población 2 cuya media es μ_2 y cuya varianza es σ_2^2 .
- (c) X_1, X_2, \dots, X_{n_1} son variables aleatorias independientes de Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} . En otras palabras, las medidas de la respuesta bajo un tratamiento no están correlacionadas con las medidas de la respuesta bajo el otro tratamiento.

Las suposiciones anteriores son las requeridas cuando n_1 y n_2 son ambas mayores o iguales a 30. En el caso más común en el que las muestras son menores de 30 (muestras pequeñas) se requieren suposiciones adicionales para el análisis.

2.1.1. Inferencias de muestras pequeñas

Suposiciones adicionales cuando el tamaño de la muestra es pequeña (< de 30)

- (a) Ambas distribuciones son normales
- (b) Las varianzas poblacionales son iguales, es decir

En resumen

Suposiciones en inferencias de muestras pequeñas

- (a) X_1, X_2, \dots, X_{n_1} es una muestra aleatoria de $N(\mu_1, \sigma^2)$
 - (b) Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} es una muestra aleatoria de $N(\mu_2, \sigma^2)$
 - (c) X_1, X_2, \dots, X_{n_1} y Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} son independientes.
-

Las estadísticas que deben considerarse en las inferencias sobre $\mu_1 - \mu_2$ se deducen a continuación. Se sabe que \bar{X} es una variable aleatoria con media μ_1 y varianza $\frac{\sigma_1^2}{n_1}$

y que \bar{Y} tiene media μ_2 y varianza

$$E(\bar{X} - \bar{Y}) = E(\bar{X}) - E(\bar{Y}) = \mu_1 - \mu_2$$

En otras palabras, $\bar{X} - \bar{Y}$ es un estimador insesgado de $\mu_1 - \mu_2$. Además, debido a que $\bar{X} - \bar{Y}$ son independientes, la covarianza entre ellas es cero, por lo tanto.

$$Var(\bar{X} - \bar{Y}) = Var(\bar{X}) + Var(\bar{Y}) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

Para muestras pequeñas asumiremos una varianza poblacional común, es decir σ^2 . En este caso

$$\text{Var}(\bar{X} - \bar{Y}) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)$$

La varianza común σ^2 se puede estimar combinando la información proporcionada por

ambas muestras utilizando una varianza ponderada. Concretamente, la suma $\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2$

incorpora $n_1 - 1$ piezas de información sobre σ^2 en razón de la restricción inherente al hecho de que independientemente de la anterior, incorpora piezas de información sobre

σ^2 en razón de la restricción inherente al hecho de que $\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X}) = 0$ independiente

de la anterior, $\sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \bar{Y})^2$ incorpora $n_2 - 1$ piezas de información sobre σ^2 . Estas dos

cantidades se pueden combinar para obtener un estimador ponderado de la varianza común σ^2

Estimador ponderado de la varianza σ^2

$$\begin{aligned} S^2_{\text{ponderada}} &= \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \bar{Y})^2}{n_1 + n_2 - 2} \end{aligned}$$

Asumiendo que la población es normal, se sabe que $\bar{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n_1}\right)$ y que

$\bar{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma^2}{n_2}\right)$. La estadística $\bar{X} - \bar{Y}$, que es la diferencia entre dos variables independientes con distribución normal, tiene también distribución normal con media

$\mu_1 - \mu_2$ y desviación estándar $\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$, por lo tanto

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

Sustituyendo el estimador ponderado $\sqrt{s^2_{ponderada}}$ para σ en la expresión anterior, se obtiene una variable con distribución t de Student que es la base para hacer inferencias sobre $\mu_1 - \mu_2$ cuando la muestra es pequeña (< 30)

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_{ponderada} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

Ahora se pueden obtener intervalos de confianza para $\mu_1 - \mu_2$. Recuérdese que el procedimiento general para calcular un intervalo de confianza es:

Estimador del parámetro \pm (Error estándar)x(valor crítico de t)

Intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$

Un Intervalo al $100(1 - \alpha)\%$ de confianza para $\mu_1 - \mu_2$ está dado por

$$\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{\alpha/2} s_{ponderada} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

Donde

$$s^2_{ponderada} = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

y $t_{\alpha/2}$ es el cuantil de t al nivel de significancia $\alpha/2$ con $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad.

Aun cuando un intervalo de confianza proporciona la suficiente información para tomar decisiones acerca de $\mu_1 - \mu_2$, en la siguiente tabla se presentan las hipótesis estadísticas y sus reglas de decisión acerca del parámetro $\mu_1 - \mu_2$.

Para la hipótesis nula $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$

La estadística de prueba :

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta_0}{S_{\text{ponderada}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

Hipótesis alternativas

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \delta_0$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \delta_0$$

Regla de decisión con nivel α

$$|t_0| \geq t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$$

$$t_0 \geq t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$$

$$t_0 \leq -t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$$

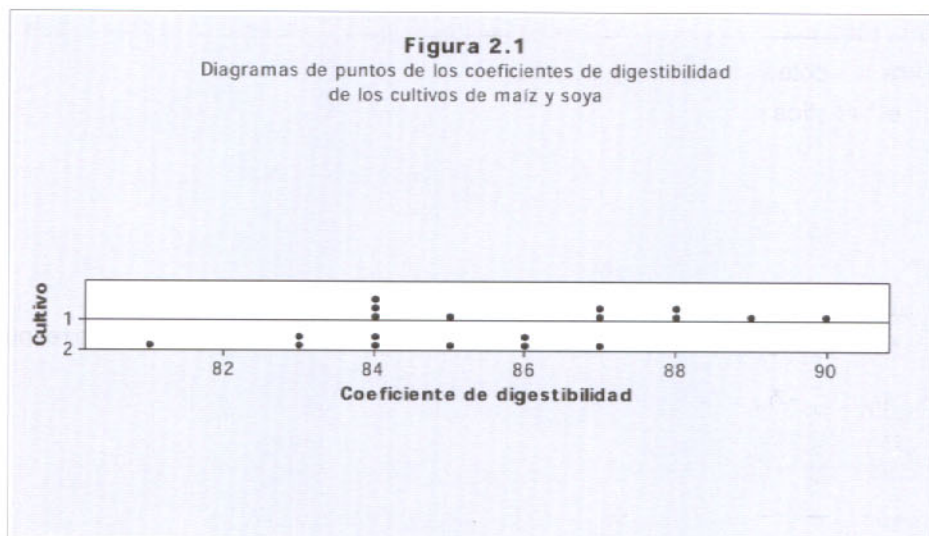
Ejemplo 2.3 Los siguientes datos son determinaciones del coeficiente de digestibilidad en 10 muestras de maíz desgrasado y 9 muestras de soya procesadas en una autoclave.

Muestra	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Maíz	87	85	84	88	84	90	84	87	89	88
Soya	85	83	86	81	86	84	83	84	87	

- (a) Si μ_X y μ_Y son las verdaderas medias del coeficiente de digestibilidad del maíz y la soya respectivamente, construya un intervalo de confianza para $\mu_X - \mu_Y$ asumiendo distribución normal y con un 95 por ciento de confianza.
- (b) Pruebe la hipótesis de que el coeficiente de digestibilidad del maíz es mayor que el de la soya. Use $\alpha = 0.05$.

Solución. El primer paso consiste en hacer dos diagramas de puntos para verificar la igualdad de las varianzas Figura 2.1

Figura 2.1
Diagramas de puntos de los coeficientes de digestibilidad
de los cultivos de maíz y soya



Los diagramas de puntos de estos datos dan la apariencia de tener aproximadamente la misma varianza. Se asume que los datos de digestibilidad del maíz y de la soya son muestras aleatorias de poblaciones normales con medias μ_X y μ_Y respectivamente, y con una varianza común σ^2 . El resumen de las estadísticas necesarias es el siguiente:

Datos de digestibilidad de maíz: $\bar{x} = 86.6$, $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 44.4$, $s_x^2 = 4.93$

Datos de digestibilidad de soya: $\bar{y} = 84.33$, $\sum (y_i - \bar{y})^2 = 28$, $s_y^2 = 3.5$

Los tamaños de muestra son $n_X = 10$ y $n_Y = 9$. La varianza ponderada es

$$s^2_{ponderada} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 + \sum (y_i - \bar{y})^2}{n_X + n_Y - 2} = \frac{44.4 + 28}{10 + 9 - 2} = 4.26$$

(a) Con un nivel de confianza del 95 por ciento $\alpha/2 = 0.025$, consultando las tablas de la distribución de t con 17 grados de libertad, Tabla D del Anexo, encontramos $t_{0.025}(17) = 2.110$. Así, un intervalo de confianza al 95 por ciento para $\mu_X - \mu_Y$ es

$$\begin{aligned} \bar{x} - \bar{y} \pm t_{0.025}(17) \times s_{ponderada} \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}} &= 86.6 - 84.33 \pm 2.110 \times 2.06 \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{9}} \\ &= 2.27 \pm 1.997 \quad \text{o} \quad (0.273, 4.267) \end{aligned}$$

(b) Para probar $H_0 : \mu_X - \mu_Y = 0$ vs $H_1 : \mu_X - \mu_Y > 0$, se emplea la estadística de prueba

$$t_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{s_{\text{ponderada}} \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}}$$

Para un $\alpha = 0.05$, la región de rechazo es $R = \{t \mid t \geq t_{0.05}(17)\}$

$$t_0 = \frac{86.6 - 84.33}{2.064 \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{9}}} = \frac{2.27}{0.9484} = 2.393$$

Para 17 grados de libertad, el valor de $t_{0.05}(17) = 1.74$, ya que el valor de t observado cae en la zona de rechazo de H_0 , se concluye que con un nivel de significancia de $\alpha = 0.05$ los datos experimentales ofrecen evidencia de que el coeficiente de digestibilidad del maíz es mayor que el de la soya.

2.1.2. Inferencias de Muestras Grandes

Cuando ambos tamaños de muestra n_1 y n_2 son grandes (mayores de 30), las suposiciones concernientes a muestras pequeñas pueden ser relajadas. No es necesaria la suposición de que las poblaciones son normales, debido a que, de acuerdo

al teorema central del límite, se asume que \bar{X} se distribuye aproximadamente $N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1})$

y que \bar{Y} se distribuye aproximadamente $N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2})$. Las inferencias se derivan de la

siguiente estadística $\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$, que tiene aproximadamente distribución $N(0,1)$

Debido a que n_1 y n_2 son ambas grandes, la aproximación se mantiene válida si σ_1^2 y σ_2^2 son reemplazadas por sus estimadores muestrales

$$s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{x})^2}{n_1 - 1} \quad \text{y} \quad s_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} (y_i - \bar{y})^2}{n_2 - 1}$$

Es decir, la suposición de varianzas poblacionales iguales no se requiere en inferencias que se derivan de muestras grandes. En el siguiente recuadro se presentan las ecuaciones para calcular intervalos de confianza y la estadística de prueba para obtener regiones de rechazo que dependen del tipo de hipótesis alternativa planteada.

Para probar

a) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \delta_0$ vs $H_a : \mu_1 - \mu_2 > \delta_0$

b) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \delta_0$ vs $H_a : \mu_1 - \mu_2 < \delta_0$

c) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ vs $H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

La estadística de prueba es:

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \quad \text{La cual tiene distribución aproximadamente } N(0,1), \text{ bajo la hipótesis nula}$$

Las regiones de rechazo para los 3 juegos de hipótesis son respectivamente:

Hipótesis alternativa:

Región de rechazo con nivel α

$H_a : \mu_1 - \mu_2 > \delta_0$

$Z_0 \geq z_\alpha$

$H_a : \mu_1 - \mu_2 < \delta_0$

$Z_0 \leq -z_\alpha$

$H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$

$|Z_0| \geq z_{\alpha/2}$

Un intervalo aproximado de confianza al $100(1-\alpha)$ para $\mu_1 - \mu_2$ está dado por

$$\bar{X} - \bar{Y} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

Donde $z_{\alpha/2}$ es la abscisa de la distribución Normal Estándar tal que el área a la derecha es $\alpha/2$

Este procedimiento no requiere la suposición de varianzas iguales.

Ejemplo 2.4 Se quiere comparar la aptitud musical en estudiantes del medio rural y urbano en base a los promedios muestrales de una prueba de aptitud musical. Se seleccionaron dos muestras aleatorias de tamaño 90 y 100 del medio rural y urbano respectivamente que habían terminado la instrucción primaria. El resumen de las estadísticas de la prueba se presenta enseguida

	Rural	Urbano
Tamaño de muestra	90	100
Media	76.4	81.2
Desviación estándar	8.2	7.6

- (a) Establezca un intervalo de confianza al 98 por ciento para la diferencia entre las medias poblacionales de dicha prueba en el medio rural y urbano.
- (b) Construya una prueba con un nivel de significancia del 0.02 para determinar si existe diferencia entre ambas medias poblacionales.

Solución. Denótese con $\mu_1 - \mu_2$ a la media poblacional de la prueba de aptitud musical en el medio rural y urbano respectivamente.

- (a) Ya que $1 - \alpha = 0.98$, se tiene $\alpha/2 = 0.01$ y $z_{0.01} = 2.33$. Así, un intervalo de confianza al 98 por ciento para $\mu_1 - \mu_2$, es

$$\bar{x} - \bar{y} \pm z_{0.01} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = 76.4 - 81.2 \pm 2.33 \sqrt{\frac{(8.2)^2}{90} + \frac{(7.6)^2}{100}} = -4.8 \pm 2.7$$

o $(-7.5, -2.2)$

Se concluye que, con un nivel de confianza del 98 por ciento, un intervalo para $\mu_1 - \mu_2$ está dado por $(-7.5, -2.2)$.

- (b) Debido a que el intervalo de confianza no incluye al cero, la hipótesis nula

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ es rechazada a un nivel de significancia $\alpha = 0.02$ a favor de la alternativa $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$.

2.2 Comparaciones apareadas

Al comparar dos poblaciones, es deseable que las unidades experimentales sean tan homogéneas como sea posible para que la comparación quede libre de posibles factores de confusión y la diferencia en la respuesta entre las dos muestras sea solo atribuible a diferencias entre tratamientos. Por otro lado, los requerimientos de homogeneidad del material experimental pueden imponer una severa limitación a los alcances de la investigación misma.

El concepto de bloqueo es fundamental para cumplir con los requerimientos de homogeneidad y al mismo tiempo de diversidad de las unidades experimentales. El procedimiento consiste en constituir bloques con unidades tan homogéneas como sea posible de tal manera que las unidades pertenecientes a diferentes bloques sean diferentes. Algunas unidades dentro de cada bloque son asignadas al tratamiento 1; las otras son asignadas al tratamiento 2. De esta manera se conserva la protección contra posibles factores de confusión y al mismo tiempo se atiende la diversidad de condiciones existente en diferentes bloques.

Esta sección discute una forma simple de bloqueo donde cada bloque consiste de un par de unidades experimentales similares. En cada bloque se asigna aleatoriamente el tratamiento 1 y la otra unidad recibe el tratamiento 2. Este diseño es llamado comparaciones apareadas.

En las comparaciones apareadas la respuesta de una unidad experimental está constituida por el efecto de las condiciones que prevalecen en el bloque, el efecto del tratamiento y el componente aleatorio. Al tomar las diferencias entre las dos observaciones en un bloque, se puede separar el efecto indeseable del bloque y permite estudiar el efecto de tratamientos.

Bloqueo

Aparear unidades experimentales similares de acuerdo a alguna(s) característica(s) identificables y sirve para remover esta fuente de variación del análisis.

La estructura de las observaciones en una comparación apareada se da en el siguiente recuadro, en donde X y Y denotan la respuesta al tratamiento 1 y al tratamiento 2 respectivamente. La diferencia a la respuesta en cada par se registra en la última columna.

Estructura de los datos para una comparación apareada

Par	Tratamiento 1	Tratamiento 2	Diferencia
1	X_1	Y_1	$D_1 = X_1 - Y_1$
2	X_2	Y_2	$D_2 = X_2 - Y_2$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n	X_n	Y_n	$D_n = X_n - Y_n$

Los pares $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ son independientes.

Estadísticas:

$$\bar{D} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i, \quad s^2_D = \frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2}{n-1}$$

Aun cuando los pares (X_i, Y_i) son independientes, X_i y Y_i dentro del i -ésimo par, serán usualmente dependientes. De hecho, si la formación de parejas de unidades experimentales es efectiva, se espera que X_i y Y_i sean relativamente grandes o pequeñas juntas; es decir, se espera que (X_i, Y_i) tengan una alta correlación positiva. Debido a que las diferencias $D_i = X_i - Y_i, i = 1, 2, \dots, n$ están libres del efecto de bloque, se puede asumir que constituyen una muestra aleatoria de una población con media δ y varianza σ^2_D , donde δ representa la verdadera media de las diferencias de los efectos de los tratamientos. En otras palabras

$$E(D_i) = E(X_i - Y_i) = \delta$$

$$Var(D_i) = Var(X_i - Y_i) = \sigma^2_D, \quad i = 1, \dots, n$$

Si la media de las diferencias δ es cero, entonces los dos tratamientos pueden considerarse como equivalentes. Un valor positivo de δ significa que el tratamiento 1 tiene una respuesta promedio mayor que el tratamiento 2. Considerando que D_1, \dots, D_n es una muestra aleatoria de una población se pueden hacer inferencias sobre la media poblacional δ .

Inferencias sobre la media de las diferencias δ en base a muestras pequeñas

Se asume que las diferencias $D_i = X_i - Y_i$, son independientes con una distribución Normal, es decir $D_i \sim N(\delta, \sigma^2_D)$. Sea

$$\bar{D} = \sum_{i=1}^n \frac{D_i}{n}, \quad s^2_D = \frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2}{n-1} \quad \text{y} \quad s_D = \sqrt{s_D^2}$$

Entonces:

(a) Un intervalo al $100(1-\alpha)$ por ciento de confianza para δ está dado por

$$\bar{D} \pm t_{\alpha/2} (n-1) \times \frac{s_D}{\sqrt{n}}$$

(b) Una prueba de $H_0 : \delta = \delta_0$ se basa en la siguiente estadística de prueba

$$t = \frac{\bar{D} - \delta_0}{\frac{s_D}{\sqrt{n}}}, \quad \text{que se distribuye según una } t \text{ de Student con}$$

$$t_0 = \frac{\bar{D} - \delta_0}{\frac{s_D}{\sqrt{n}}}, \quad \text{que se distribuye según una } t \text{ de Student con } n-1 \text{ grados de libertad.}$$

Recuérdese que la suposición de distribución normal se puede relajar cuando el tamaño de la muestra es grande. Aplicando el teorema central del límite a las diferencias

D_1, D_2, \dots, D_n se puede considerar que cuando $n > 30$, la cantidad

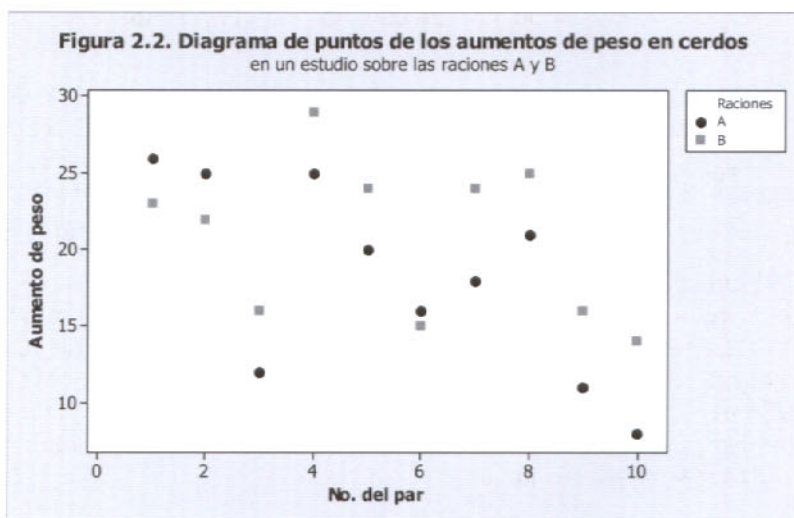
$$t = \frac{\bar{D} - \delta_0}{\frac{s_D}{\sqrt{n}}}, \text{ se distribuye aproximadamente } N(0,1)$$

Ejemplo 2.5 Un ingeniero agrónomo procedió a investigar sobre la efectividad de dos raciones o dietas en el incremento de peso en cerdos, las raciones se representan con las letras A y B. Previamente los cerdos se clasificaron por peso y edad, lo que se usó para aparear individuos similares, posteriormente a cada individuo de un par se le asignó aleatoriamente una ración y al otro la otra; después de un determinado número de semanas, se pesaron los individuos de los 10 pares que sirvieron para el experimento habiéndose tenido los siguientes resultados.

Tabla 2.1 Aumento de peso en kilogramos por el suministro de dos raciones en cerdos.

No. del par	Aumento de peso en kilogramos		
	Ración A	Ración B	A - B = X
1	26	23	3
2	25	22	3
3	12	16	-4
4	25	29	-4
5	20	24	-4
6	16	15	1
7	21	25	-6
8	21	25	-4
9	11	16	-5
10	8	14	-6
Suma	182	208	-26
Media	18.2	20.8	-2.6

El diagrama de puntos del comportamiento de ambas raciones muestra que la ración B produce mayores incrementos que la A.



Con base a los datos de la Tabla 2.1 se proporciona el siguiente resumen estadístico.

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{10} d_i}{10} = \frac{-26}{10} = -2.6, \quad s_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (d_i - \bar{d})^2}{10 - 1}} = \sqrt{\frac{112.402}{9}} = 3.534$$

Asumiendo que las diferencias apareadas constituyen una muestra aleatoria de una población normal $N(\delta, \sigma^2_D)$, un intervalo de confianza al 95 por ciento para la media de las diferencias δ está dado por

$$\bar{d} \pm t_{0.025}(9) \frac{s_D}{\sqrt{10}}$$

De la tabla de t encontramos $t_{0.025}(9) = 2.262$. El intervalo de confianza al 95 por ciento puede ser ahora calculado

$$-2.6 \pm 2.262 \times \frac{3.534}{\sqrt{10}} = -2.6 \pm 2.528 \quad \text{o} \quad (-5.528, -0.072)$$

Esto significa que con un nivel de confianza de 95 por ciento la media de la diferencia en el incremento de peso entre las raciones A y B está entre -5.528 y -0.072 kilogramos. Además, debido a que el intervalo de confianza incluye solo valores negativos, la superioridad de la ración B está apoyada por los datos. Se puede desear probar la hipótesis nula $H_0 : \delta = 0$ vs $H_1 : \delta < 0$. Asumiendo un $\alpha = 0.05$. La región de rechazo es $t < -t_{0.05}(9) = -1.833$. El valor observado de la estadística de prueba es

$$t = \frac{\bar{d}}{\frac{s_D}{\sqrt{n}}} = \frac{-2.6}{\frac{3.534}{\sqrt{10}}} = \frac{-2.6}{1.12} = -2.32$$

Valor que cae en la región de rechazo. Consecuentemente H_0 es rechazada a favor de H_1 a un nivel de significancia del 5 por ciento.

2.3 Comparación de dos proporciones binomiales

En esta sección se abordan las inferencias concernientes a la comparación de dos proporciones de la incidencia de una característica de interés en dos poblaciones. La proporción desconocida de individuos que poseen la característica en la población 1 y en la población 2 se denotarán por p_1 y p_2 , respectivamente. Nuestro interés se centra en la construcción de intervalos de confianza para el parámetro $(p_1 - p_2)$ y en la prueba de la hipótesis nula de no diferencia $H_0 : p_1 = p_2$. Comparar la proporción de agricultores que usan fertilizantes orgánicos en dos sistemas productivos, la proporción de explotaciones lecheras que aplican lactotropina en la producción de leche en dos cuencas lecheras y la proporción de mortalidad infantil antes de cumplir un año de edad en dos grupos étnicos; son solo tres ejemplos de este tipo de comparación. Compatible con este método está también la comparación de dos tratamientos donde la respuesta de un individuo toma una de dos posibles categorías que técnicamente se les llama éxito o fracaso. Las proporciones de éxitos de los dos tratamientos se identifican como dos proporciones

poblacionales p_1 y p_2 . La principal diferencia que debe quedar clara entre los problemas que aborda la presente sección, con respecto a las secciones precedentes, es el tipo de variable, aquí se trabaja con conteos binomiales más que con mediciones en una determinada escala.

Debido a que una proporción muestral es la cantidad básica para hacer inferencias sobre una proporción poblacional, de manera natural se considera la estadística $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ para hacer inferencias sobre $p_1 - p_2$.

Estructura de la inferencia

Parámetro : $p_1 - p_2 = (\text{proporción en la población 1}) - (\text{proporción en la población 2})$

Información de la muestra: Basada en muestras aleatorias independientes de ambas poblaciones.

X = número de éxitos en n_1 ensayos de la población 1

Y = número de éxitos en n_2 ensayos de la población 2

Proporciones muestrales: $\hat{p}_1 = \frac{X}{n_1}$, $\hat{p}_2 = \frac{Y}{n_2}$

Recuérdese que la media y la varianza de las proporciones muestrales son:

$$E(\hat{p}_1) = p_1 \quad E(\hat{p}_2) = p_2$$

$$\text{Var}(\hat{p}_1) = \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} \quad \text{Var}(\hat{p}_2) = \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}$$

Con base al hecho de que \hat{p}_1 y \hat{p}_2 son independientes, la media y la varianza de la diferencia $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ están dadas por:

$$E(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = p_1 - p_2$$

$$\text{Var}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}$$

El primer resultado muestra que $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ es un estimador insesgado de $p_1 - p_2$. Un estimador de la varianza se obtiene al reemplazar p_1 y p_2 por sus respectivos estimadores muestrales \hat{p}_1 y \hat{p}_2 . Adicional a lo anterior, para n_1 y n_2 grandes, la estadística $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$ es aproximadamente normal, por eso

$$\frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}} \text{ se distribuye aproximadamente } N(0,1)$$

En el caso de muestras grandes, un intervalo aproximado de confianza al $100(1-\alpha)$ para $p_1 - p_2$ está dado por

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

Para probar la hipótesis nula $H_0 : p_1 - p_2 = 0$, se denota a la proporción poblacional desconocida por p . Bajo la hipótesis nula, la estadística $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ tiene distribución aproximadamente normal con

$$E(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = 0$$

$$\text{Var}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = p(1-p) \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)$$

El parámetro desconocido p involucrado en la varianza, debe ser estimado integrando la información contenida en ambas muestras mediante un estimador ponderado que toma en cuenta los tamaños de muestra.

Estimador ponderado $\hat{p} = \frac{X + Y}{n_1 + n_2}$ El estimador de $Var(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$ está dado por

$\hat{p}(1 - \hat{p}) \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)$ De lo anterior, si n_1 y n_2 son grandes, bajo $H_0 : p_1 - p_2 = 0$,

la estadística $Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p}) \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$ tiene distribución aproximadamente $N(0, 1)$

Dependiendo de la hipótesis alternativa, se puede definir la región de rechazo de uno o dos lados en términos de la estadística estandarizada Z .

Ejemplo 2.6 En un ejercicio presentado en el libro *Métodos Estadísticos* de los autores Said Infante G. y Guillermo P. Zárate de L. página 398, se proporcionan los resultados de un estudio del efecto de una hormona sobre la capacidad de enraizar de una planta que se propaga vegetativamente en el que se plantaron 75 brotes tratados con la hormona y 75 sin tratar. Al cabo de 14 días se registró el número de plantas enraizadas en cada grupo. Los resultados se presentan enseguida.

	Plantadas	Enraizadas
Tratadas	75	64
Sin tratar	75	38

- Encuentre un intervalo de confianza al 95 por ciento para la diferencia en la proporción de enraizamiento entre el grupo de brotes tratados y los no tratados con la hormona.
- Es posible concluir que la proporción de enraizamiento en los brotes tratados es mayor que el de los no tratados? Use $\alpha = 0.05$.

Solución. (a) se denota a la proporción poblacional de enraizamiento de los brotes tratados con la hormona y los no tratados por p_1 y p_2 respectivamente.

$$\hat{p}_1 = \frac{64}{75} = 0.853$$

$$\hat{p}_2 = \frac{38}{75} = 0.51$$

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = 0.853 - 0.51 = 0.343$$

$$\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} = \sqrt{\frac{0.853(1-0.853)}{75} + \frac{0.51(1-0.51)}{75}} = \sqrt{\frac{0.1254}{75} + \frac{0.25}{75}} = \sqrt{0.005} = 0.071$$

$$(0.343 - 1.96 \times 0.071, 0.343 + 1.96 \times 0.071) = (0.204, 0.482)$$

De la tabla normal (Tabla C del Anexo) se sabe que $z_{0.025} = 1.96$, por eso, un intervalo aproximado de confianza al 95 por ciento para $p_1 - p_2$ es

Lo anterior significa que aproximadamente el 95 por ciento de los intervalos calculados de esta manera contendrán la verdadera diferencia $p_1 - p_2$.

Solución (b) en este inciso se quiere probar el juego de hipótesis $H_0: p_1 - p_2 = 0$ vs $H_1: p_1 - p_2 > 0$. La estimación ponderada de p bajo H_0 es

$$\hat{p} = \frac{64 + 38}{2 \times 75} = 0.68$$

La estadística de prueba Z es

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p}) \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{0.343}{\sqrt{0.68(1-0.68) \times \frac{2}{75}}} = \frac{0.343}{\sqrt{0.0058}} = 4.5$$

Para un $\alpha = 0.05$ la región de rechazo es $z \geq z_{0.05} = 1.64$. Debido a que el valor observado es mayor, se rechaza la hipótesis nula y se concluye que la evidencia experimental

apoya a la hipótesis alternativa, es decir, existe evidencia experimental $\alpha = 0.05$ de que los brotes tratados con la hormona tienen una proporción de enraizamiento mayor con respecto a los no tratados.

2.4. Comparación de la varianza de dos poblaciones normales

Con frecuencia es de interés para un investigador comparar la variabilidad de dos poblaciones, especialmente cuando la variabilidad es considerada un indicador importante del comportamiento de un tratamiento. En esta sección se estudia cómo se pueden probar hipótesis sobre dos varianzas poblacionales y también la construcción de intervalos de confianza para el cociente de dos varianzas.

La distribución ji-cuadrada (χ^2)

Sean Z_1, Z_2, \dots, Z_ν es un conjunto de ν variables aleatorias independientes cada una con distribución normal con media cero y varianza uno. La suma de cuadrados de

estas variables $\sum_{i=1}^{\nu} Z_i^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_\nu^2$ tiene una distribución denominada

distribución ji-cuadrada (χ^2). El número de variables normales que la constituyen define el parámetro de la distribución denominado grados de libertad ν . Lo anterior se escribe,

$$\sum_{i=1}^{\nu} Z_i^2 \sim \chi^2(\nu)$$

La distribución $\chi^2(\nu)$ tiene por media ν y varianza 2ν . Tiene sesgo a la derecha, pero la asimetría disminuye al aumentar ν y para ν mayor que 50, $\chi^2(\nu)$ es aproximadamente normal.

Suposiciones:

- X_1, \dots, X_{n_1} es una muestra aleatoria de una población $N(\mu_1, \sigma_1^2)$
- Y_1, \dots, Y_{n_2} es una muestra aleatoria de una población $N(\mu_2, \sigma_2^2)$
- Las dos muestras son independientes.

Si se cumple la suposición a) se deduce el siguiente resultado: Dado que $Z_i = \frac{(X_i - \mu_1)}{\sigma_1}$

tiene distribución normal con media cero y varianza uno, la suma de cuadrados $\sum_{i=1}^{n_1} Z_i^2$

tiene una distribución ji-cuadrada con n_1 grados de libertad, esto es

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1)$$

La estimación apropiada de la varianza cuando se conoce la media de la población es

$$s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2}{n_1}, \text{ De donde se deduce que } \frac{n_1 s_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1).$$

En la práctica se desconoce la media poblacional y se tiene que reemplazar por el estimador \bar{X} . Se puede demostrar el siguiente resultado

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1 - 1)$$

Dado que el estimador apropiado de la varianza poblacional, cuando ésta se desconoce, es

$$s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2}{n_1 - 1}, \text{ se deduce que } \frac{(n_1 - 1)s_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1 - 1)$$

Inferencias sobre el cociente de dos varianzas

Supóngase ahora que se toma una muestra aleatoria de n_1 observaciones de una población con varianza σ_1^2 , que tomamos otra muestra aleatoria de n_2 observaciones de otra población normal con varianza σ_2^2 y que se tienen los estimadores s_1^2 y s_2^2 con $(n_1 - 1)$ y $(n_2 - 1)$ grados de libertad, respectivamente. Entonces

$$\frac{(n_1 - 1)s_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1 - 1) \quad \text{y} \quad \frac{(n_2 - 1)s_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2 - 1)$$

Ahora bien, dado que las dos muestras son independientes, la siguiente definición conduce a los métodos de prueba.

Distribución de F

Si X_1, \dots, X_{n_1} y Y_1, \dots, Y_{n_2} son muestras aleatorias independientes de dos distribuciones normales $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, respectivamente, entonces la distribución del cociente de dos ji-cuadradas que han sido divididas entre sus grados de libertad tiene distribución de F.

$$F = \frac{\frac{s_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{s_2^2}{\sigma_2^2}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2}{(n_1 - 1)\sigma_1^2}}{\frac{\sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \bar{Y})^2}{(n_2 - 1)\sigma_2^2}}$$

Tiene distribución F $(n_1 - 1)$ y $(n_2 - 1)$ con grados de libertad en el numerador y el denominador respectivamente.

Equivalentemente se puede escribir

$$\frac{S_1^2}{\sigma_1^2} \sim F_{(n_1-1), (n_2-1)} \quad \text{y además} \quad \frac{S_2^2}{\sigma_2^2} \sim F_{(n_2-1), (n_1-1)}$$

$$\frac{S_2^2}{\sigma_2^2} \quad \text{y además} \quad \frac{S_1^2}{\sigma_1^2}$$

De este resultado se desprende el procedimiento para probar las siguientes hipótesis de interés;

$$\text{a) } H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 1 \quad \text{vs} \quad H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$$

$$\text{b) } H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \geq 1 \quad \text{vs} \quad H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$$

$$\text{c) } H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \quad \text{vs} \quad H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

Bajo el supuesto de que la H_0 es verdadera, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, entonces la estadística

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{(n_1-1), (n_2-1)}$$

Y el recíproco de la cantidad anterior

$$\frac{1}{F} = F^* = \frac{S_2^2}{S_1^2} \sim F_{(n_2-1), (n_1-1)}$$

De las dos ecuaciones anteriores se deducen las regiones de rechazo para probar cada

uno de los juegos de hipótesis:

Para el juego de hipótesis a) la región de rechazo a un nivel de significancia α está dado por

$$F \geq F_{(n_1-1), (n_2-1)}(\alpha)$$

Para el juego de hipótesis b) la región de rechazo a un nivel de significancia α está dado por

$$F^* \geq F_{(n_2-1), (n_1-1)}(\alpha)$$

Nótese que se debe usar el recíproco de F ya que se requiere que la región de rechazo se de a la derecha de la distribución, porque las tablas de F solo proporcionan cuantiles en la cola derecha de la misma.

Para el juego de hipótesis c) la región de rechazo se define mediante dos cuantiles localizados en los dos extremos de la distribución. Utilizando la estadística de prueba F la región de rechazo está dada por

$$F \geq F_{(n_1-1), (n_2-1)}(\alpha/2) \quad \text{o} \quad F \leq F_{(n_1-1), (n_2-1)}(1-\alpha/2)$$

Sin embargo como ya se dijo, el cuantil que aparece a la derecha no lo proporcionan las tablas de F . Para obtener ese valor se proporciona la siguiente identidad

$$F_{(n_1-1), (n_2-1)}(1-\alpha/2) = \frac{1}{F_{(n_2-1), (n_1-1)}(\alpha/2)}$$

Ejemplo 2.7. Con referencia al ejemplo 2.3 en el que se compararon determinaciones del coeficiente de digestibilidad en 10 muestras de maíz desgrasado y 9 muestras de soya procesadas en una autoclave. El análisis estadístico supone homogeneidad de varianzas y en la Figura 2.1 se presentó una gráfica en la que no se aprecia variabilidad diferente en ambas muestras. Ahora contamos con el procedimiento para probar la hipótesis de homogeneidad de varianzas basada en dos muestras que proceden de poblaciones normales.

El juego de hipótesis a probar es: $H_0 : \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} = 1$ vs $H_1 : \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \neq 1$

Donde σ_X^2 y σ_Y^2 representan las varianzas poblacionales de los coeficientes de digestibilidad del maíz y la soya, respectivamente.

Las estimaciones de las varianzas y los tamaños de muestra son los siguientes:

Tamaño de muestra	Varianza
$n_X = 10$	$s_X^2 = 4.93$
$n_Y = 9$	$s_Y^2 = 3.5$

Cálculo de la estadística de prueba:

$$F = \frac{s_X^2}{s_Y^2} = \frac{4.93}{3.5} = 1.41$$

Suponiendo un nivel de significancia $\alpha = 0.05$, la región de rechazo es

$$F \geq F_{(10-1),(9-1)}(0.05/2) \quad \text{o} \quad F \leq F_{(10-1),(9-1)}(1-0.05/2)$$

Equivalentemente

$$F \geq F_{9,8}(0.025) \quad \text{o} \quad F \leq F_{9,8}(0.975)$$

Consultando las tablas de la distribución de F (Tabla F del Anexo) se tiene:

$$F_{9,8}(0.025) = 4.357 \quad \text{y} \quad F_{9,8}(0.975) = \frac{1}{F_{8,9}(0.025)} = \frac{1}{4.102} = 0.244$$

Se rechaza H_0 : con un nivel de significancia $\alpha = 0.05$, si

$$F \geq 4.357 \quad \text{o} \quad F \leq 0.244$$

Conclusión: como el valor de la estadística de prueba no cae en la zona de rechazo de H_0 , se concluye que no hay evidencia experimental $\alpha = 0.05$ que permita suponer que las varianzas no son iguales.

Un intervalo de confianza al $100(1 - \alpha)\%$ para el cociente de dos varianzas cuyas poblaciones son normales se construye a partir de la distribución de F de la siguiente manera.

$$F = \frac{\frac{s_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{s_2^2}{\sigma_2^2}} = \frac{\sigma_2^2 s_1^2}{\sigma_1^2 s_2^2}$$

$$P \left[\frac{1}{F_{(n_2-1)(n_1-1)}(\alpha/2)} \leq \frac{\sigma_2^2 s_1^2}{\sigma_1^2 s_2^2} \leq F_{(n_1-1)(n_2-1)}(\alpha/2) \right] = 1 - \alpha$$

Es equivalente a:

$$P \left[\frac{s_2^2}{s_1^2 F_{(n_2-1)(n_1-1)}(\alpha/2)} \leq \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leq \frac{s_2^2}{s_1^2} F_{(n_1-1)(n_2-1)}(\alpha/2) \right] = 1 - \alpha$$

Es equivalente a:

$$P \left[\frac{s_1^2}{s_2^2 F_{(n_1-1)(n_2-1)}(\alpha/2)} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{s_1^2}{s_2^2} F_{(n_2-1)(n_1-1)}(\alpha/2) \right] = 1 - \alpha$$

Un intervalo de confianza al $100(1 - \alpha)\%$ para el cociente de dos varianzas cuyas poblaciones son normales es:

$$\frac{s_x^2}{s_y^2} F_{(n_x - 1), (n_y - 1)}(\alpha/2) \leq \frac{s_x^2}{s_y^2} \leq \frac{s_x^2}{s_y^2} F_{(n_y - 1), (n_x - 1)}(\alpha/2)$$

2.5 Tamaño de muestra para comparar dos medias de dos poblaciones normales en función de la probabilidad de cometer los errores tipo I y II

En la actualidad, las publicaciones científicas requieren que los autores proporcionen información sobre el tamaño necesario de la muestra que permita detectar una diferencia de importancia práctica en función de cometer los errores tipo I y II.

A continuación se proporciona la ecuación que permite calcular el tamaño de muestra con el objeto de comparar las medias de dos muestras independientes. Con la finalidad de simplificar la ecuación, se supone homogeneidad de varianzas y que los tamaños de las muestras en los dos grupos son iguales. Se omite la deducción por razones de espacio, pero se puede consultar en la obra de Cohen que aparece en referencias al final del presente capítulo.

Ecuación para calcular el tamaño de muestra para comparar dos medias mediante un método iterativo.

$$n = \frac{2s^2(t_{\alpha/2} + t_{\beta})^2}{\delta^2}$$

Donde:

$t_{\alpha/2}$ Es el cuantil de la distribución de t que está en función del tamaño de muestra inicial y del nivel de significancia de la prueba, t_{β} Es el cuanto de la distribución de t que está en función del tamaño de muestra inicial y de la probabilidad de cometer error tipo II y δ = Es la diferencia que se desea detectar.

Método iterativo:

1. tome un valor de n arbitrario, n_0

2. Con n_0 obtenga $t^{(0)}_{\alpha/2}(n_0 - 1)$ y $t^{(0)}_{\beta}(n_0 - 1)$

3. Con la ecuación $n = \frac{2s^2(t_{\alpha/2} + t_{\beta})^2}{\delta^2}$ obtenga n_1

4. Con n_1 obtenga $t^{(1)}_{\alpha/2}(n_1 - 1)$ y $t^{(1)}_{\beta}(n_1 - 1)$

5. Con la ecuación obtenga n_2

6. Con n_2 obtenga $t^{(2)}_{\alpha/2}(n_2 - 1)$ y $t^{(2)}_{\beta}(n_2 - 1)$

7. Con la ecuación obtenga n_3

8. Continúe el proceso hasta que dos valores sucesivos de n_i y n_{i+1} coincidan.
Redondear hacia arriba.

Ejemplo 2.8 Se desea estudiar la conductividad eléctrica del suelo en un campo experimental para ello se tomaron 20 muestras de suelo: 10 a (0 a 30) cm de la superficie y 10 a (30 a 60) cm. Los resultados (en mmhos/cm) se presentan a continuación.

	Muestra									
Profundidad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(0, 30)	7.2	7.6	8.3	8.2	9.1	7.5	8.0	8.1	8.3	7.4
(30, 60)	9.8	9.6	10.9	11.7	9.3	8.9	10.6	11.0	10.0	10.3

Obtenga el tamaño de muestra requerido para detectar una diferencia media en los valores de conductividad eléctrica del suelo de 1 mmhos/cm o más, ya que se supone que una diferencia de 1 mmhos/cm o más ya tiene repercusiones de importancia práctica en el desarrollo de los cultivos. Supóngase además que se requiere un nivel de significancia de la prueba de $\alpha = 0.02$ y una probabilidad de cometer error II de 0.10.

Solución. Se cuenta con los siguientes datos:

$$n_0 = 10$$

Se calcula la varianza promedio de ambas muestras;

$$s^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2}{2} = \frac{0.3156 + 0.7343}{2} = 0.525$$

$$t^{(0)}_{0.01}(9) = 2.821$$

$$t^{(0)}_{0.10}(9) = 1.383 \text{ Obtenido con el software estadístico MINITAB}$$

$$\delta = 1$$

$$n_1 = \frac{2 \times s^2 [t_{0.01}(9) + t_{0.10}(9)]^2}{\delta^2} = \frac{2 \times 0.525 \times [2.821 + 1.383]^2}{1^2} = 18.56 \approx 19$$

Primera iteración

$$t^{(1)}_{0.01}(18) = 2.552$$

$$t^{(1)}_{0.10}(18) = 1.330$$

$$\delta = 1$$

$$n_2 = \frac{2 \times s^2 [t_{0.01}(18) + t_{0.10}(18)]^2}{\delta^2} = \frac{2 \times 0.525 \times [2.552 + 1.330]^2}{1^2} = 15.82 \approx 16$$

Segunda iteración

$$t_{0.01}^{(2)}(15) = 2.602$$

$$t_{0.10}^{(2)}(15) = 1.341$$

$$\delta = 1$$

$$n_3 = \frac{2 \times s^2 [t_{0.01}^{(2)}(15) + t_{0.10}^{(2)}(15)]^2}{\delta^2} = \frac{2 \times 0.525 \times [2.602 + 1.341]^2}{1^2} = 16.325 \approx 17$$

Tercera iteración

$$t_{0.01}^{(3)}(16) = 2.583$$

$$t_{0.10}^{(3)}(16) = 1.337$$

$$\delta = 1$$

$$n_4 = \frac{2 \times s^2 [t_{0.01}^{(3)}(16) + t_{0.10}^{(3)}(16)]^2}{\delta^2} = \frac{2 \times 0.525 \times [2.583 + 1.337]^2}{1^2} = 16.13 \approx 17$$

Cuarta iteración

Por lo tanto, el tamaño de muestra requerido es de 17. Como ya se cuenta con 10 muestras de cada profundidad solo es necesario extraer 7 muestras adicionales de cada profundidad.

2.6. Comparación de dos muestras usando la computadora

La mayoría de los paquetes estadísticos cuentan con procedimientos para comparar dos muestras utilizando la prueba de t . En el sistema SAS la comparación de dos muestras independientes se realiza usando PROC TTEST. Este procedimiento, sin solicitarlo, proporciona una prueba de homogeneidad de varianzas e intervalos de confianza, tanto para la diferencia de medias como para la varianza ponderada. Además proporciona niveles observados de significancia para comparar dos medias bajo el supuesto de homogeneidad de varianzas y bajo el supuesto de su incumplimiento. Para comparar dos poblaciones mediante muestras apareadas se usa PROC MEANS.

Ejemplo 2.9 En el Ejemplo 2.3 se analizaron muestras independientes de coeficientes de digestibilidad de maíz y de soya. La prueba de hipótesis correspondiente es realizada con el siguiente programa SAS.

```
DATA DOSINDEP;
INPUT DIGEST POBL $ @@;
CARDS;
87 M 85 M 84 M 88 M 84 M 90 M 84 M 87 M 89 M 88 M
85 S 83 S 86 S 81 S 86 S 84 S 83 S 84 S 87 S;
PROC TTEST; CLASS POBL; VAR DIGEST;
RUN;
```

En este programa la variable respuesta lleva el nombre DIGEST. La variable POBL le indica al sistema qué valores pertenecen al maíz (M) y a la soya (S). El procedimiento TTEST requiere la información sobre cuál es la variable indicadora y cuál es la variable respuesta, misma que se proporciona después de los datos. La salida de SAS es la siguiente:

Sistema SAS

13:16 Sunday, July 4, 2007

The TTEST Procedure

Statistics

Variable	POBL	Lower CL		Upper CL		Lower CL	Upper CL	Lower CL	Upper CL
		N	Mean	Media	Mean				
DIGEST	M	10	85.011	86.6	88.189	1.5278	2.2211	4.0549	0.7024
DIGEST	S	9	82.895	84.333	85.771	1.2637	1.8708	3.5841	0.6236
DIGEST	Diff (1-2)		0.2661	2.2667	4.2672	1.5486	2.0637	3.0398	0.9482

T-Tests

Variable	Método	Varianças	DF	Valor t	Pr > t
DIGEST	Poded	Equal	17	2.39	0.0287
DIGEST	Satterthwaite	Unequal	16.9	2.41	0.0274

Equality of Variances

Variable	Método	Num DF	Den DF	F-Valor	Pr > F
DIGEST	Fdded F	9	8	1.41	0.6393

Obsérvese que se proporcionan intervalos de confianza individuales para cada variable y además el intervalo de confianza para la diferencia de medias. En cuanto a las varianzas, se proporcionan intervalos de confianza para cada desviación estándar y también para la desviación estándar ponderada. Todos los intervalos de confianza proporcionados en esta salida de SAS son al 95 por ciento. Para inferencias a otro nivel de significancia se pueden calcular fácilmente ya que SAS proporciona los errores estándar asociado a cada parámetro estimado.

Con el encabezado `t-tests` se proporciona una tabla en la que aparecen en la última columna los niveles observados de significancia para probar el juego de hipótesis

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ vs $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$, el primero $\hat{\alpha} = 0.0287$ corresponde a la prueba que supone homogeneidad de varianzas y el segundo $\hat{\alpha} = 0.0274$ al de varianzas diferentes.

Finalmente se proporciona el nivel observado de significancia $\hat{\alpha} = 0.6393$ para probar el juego de hipótesis

$$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \quad \text{vs} \quad H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

Ejemplo 2.10 Con referencia al Ejemplo 2.5 en el que se comparan dos raciones para el incremento de peso en cerdos utilizando muestras apareadas. A continuación se proporciona el programa SAS que realiza el análisis para probar $H_0 : \delta = 0$ vs $H_1 : \delta \neq 0$

```
DATA RACIONES;
INPUT RACA RACB @@;
DIF=RACA - RACB;
CARDS;
26 23 25 22 12 16 25 29 20 24 16 15 18 24 21 25 11 16 8 14;
PROC MEANS N MEAN STDERR T PRT;
VAR DIF;
RUN;
```

SALIDA DE SAS

Sistema SAS		16:21 Sunday, July 4, 2007		
Procedimiento MEANS				
Variable de análisis : DIF				
Número de Observaciones	Media	Error Estándar	Valor t	Pr > t
10	-2.6000000	1.1175370	-2.33	0.0450

Para probar el juego de hipótesis $H_0 : \delta = 0$ vs $H_1 : \delta \neq 0$ el valor de t es -2.33 y el nivel observado de significancia es $\hat{\alpha} = 0,045$. Si se desea construir un intervalo de confianza para δ se cuenta con el error estándar de la estimación el cual es en este caso.

$$\frac{s_D}{\sqrt{n}} = \frac{3.53}{\sqrt{10}} = 1.118$$

Ejemplo 2.11 Con respecto al Ejemplo 2.6 en el que se proporcionan los resultados de un estudio sobre el efecto de una hormona sobre la capacidad de enraizar de una planta de propagación vegetativa. Se plantaron 75 brotes tratados con la hormona y 75 sin tratar. Al cabo de 14 días se registró el número de plantas enraizadas en cada grupo. Los resultados se presentan enseguida:

	Plantadas	Enraizadas
Tratadas	75	64
Sin Tratar	75	38

El objetivo de la inferencia consiste en construir un intervalo de confianza del 95 por ciento para la diferencia en la proporción de enraizamiento entre el grupo de brotes tratados y los no tratados con la hormona. Además se desea probar la hipótesis de que los brotes tratados presentan una proporción de enraizamiento mayor con respecto a los no tratados.

A continuación se presenta el análisis que proporciona el paquete estadístico MINITAB. Este paquete se opera a través de barras de tareas y ventanas interactivas. En el análisis que se presenta a continuación se solicitó un intervalo de confianza para $(p_1 - p_2)$ del 95 por ciento; además, del nivel observado de significancia para probar el siguiente juego

de hipótesis:

$$H_0 : p_1 - p_2 \leq 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : p_1 - p_2 > 0$$

Debido a que bajo la hipótesis nula $p_1 = p_2$, para probar este juego de hipótesis debe escogerse la opción que brinda el MINITAB de usar el estimador ponderado de p , que en este caso coincide con la media aritmética.

SALIDA DEL MINITAB

Sample	X	N	Sample p
1	64	75	0.853333
2	38	75	0.506667

Difference = p (1) - p (2)
 Estimate for difference: 0.346667
 95% lower bound for difference: 0.230341
 Test for difference = 0 (vs > 0): Z = 4.55 P-Value = 0.000

Interpretación: La salida de MINITAB proporciona las estimaciones de las proporciones de enraizamiento para los brotes tratados $\hat{p}_1 = 0.853333$ y los no tratados $\hat{p}_2 = 0.506667$. Además, la estimación de la diferencia entre ambas proporciones es: $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = 0.346667$. El límite inferior al 95 por ciento para la diferencia $p_1 - p_2$ es 0.230341.

El valor calculado de la estadística Z para probar: $H_0 : p_1 - p_2 \leq 0$ vs $H_1 : p_1 - p_2 > 0$ es 4.55, al que corresponde un nivel observado de significancia de 0.000, que debe interpretarse a ser menor de una diezmilésima.

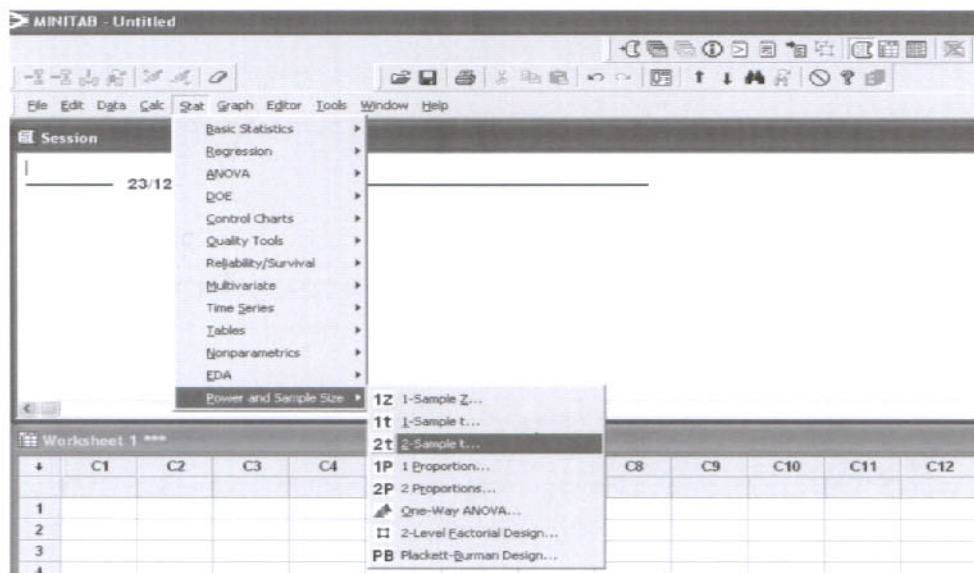
La conclusión es por tanto que la proporción de enraizamiento en los brotes tratados con la hormona es significativamente superior a los no tratados.

Ejemplo 2.12 Con respecto al ejemplo 2.8 el objetivo es estudiar la conductividad eléctrica del suelo en un campo experimental. Se cuenta con datos de un muestreo

preliminar en el que se tomaron 10 muestras de suelo a una profundidad de (0 a 30 cm) de la superficie y 10 a (30 a 60). Ahora se desea obtener el número de muestras adicionales que se requieren para detectar una diferencia, entre ambas profundidades, de un mmho/cm con un nivel de significancia de $\alpha = 0.02$ y una probabilidad de cometer error tipo II de 0.10. Se presentan a continuación las ventanas interactivas que despliega MINITAB en las cuales se proporciona la información requerida para obtener el tamaño de muestra. Los datos para obtener el tamaño de muestra son:

- La diferencia a detectar, que es de 1 mmho/cm.
- La potencia de la prueba. Al respecto, se sabe que ésta guarda la siguiente relación con respecto a la probabilidad de cometer error tipo II. Potencia de la prueba = 1- probabilidad de cometer error II. De lo anterior se deduce que la potencia de la prueba es $1 - 0.10 = 0.90$.
- La desviación estándar promedio del muestreo preliminar que es:

$$s = \sqrt{0.525} = 0.7246$$
- El tipo de prueba es de dos colas.
- El nivel de significancia, que es de $\alpha = 0.02$.



Power and Sample Size for 2-Sample t



Specify values for any two of the following:

Sample sizes:

Differences:

Power values:

Standard deviation:

Options...

Help

OK

Cancel

Power and Sample Size for 2-Sample t - Options



Alternative Hypothesis

- Less than
 Not equal
 Greater than

Significance level:

Store sample sizes in:

Store differences in:

Store power values in:

Select

Help

OK

Cancel

La salida de MINITAB es la siguiente:

Power and Sample Size

2-Sample t Test

Testing mean 1 = mean 2 (versus not =)

Calculating power for mean 1 = mean 2 + difference

Alpha = 0.02 Assumed standard deviation = 0.7246

Difference	Sample Size	Target Power	Actual Power
1	16	0.9	0.918924

The sample size is for each group.

Interpretación. Para probar el juego de hipótesis:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 1 \text{ vs } H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 1$$

El tamaño de muestra requerido, en cada profundidad del suelo, para conseguir una potencia de la prueba de 0.90 es de 16. Lo anterior significa que se deben extraer 6 muestras de suelo adicionales de cada profundidad.

REFERENCIAS

- Bhattacharyya, G. K., y Johnson, R. A., 1976. *Statistical Concepts and Methods*, J. Wiley & Sons. USA. 639 p.
- Cohen, 1988. *Statistical Power Analysis for Behavioral Science*. Academic Press. USA.
- Dowdy, S y Wearden, S. 1991. *Statistics for Research*. Segunda edición, Wiley & Sons. USA. 629 p.
- Box, G. E. P., Hunter, W. G. y Hunter, J. S. 1993. *Estadística Para Investigadores*, ED. Reverté – Wiley. España. 667 p.
- Prat, B. A., Tort-Martorell, L. X., Grima, C. P. y Pozueta, F. L. 1999. *Métodos Estadísticos (Control y Mejora de la calidad)*. Universidad Politécnica de Cataluña Barcelona, España. 300 p.

Ostle, B. 1965. *Estadística Aplicada*, Limusa-Wiley, S. A. México. 629 p.

2.7. Ejercicios de problemas diversos

2.1 Se realizó un trabajo de investigación para determinar cómo la administración de una hormona de crecimiento afecta la ganancia de peso en ratas en gestación. Se registraron las ganancias de peso durante el período de gestación de 6 ratas control y 6 ratas recibiendo la hormona de crecimiento. Los datos obtenidos se resumen en la siguiente tabla.

	Ratas control	Ratas con la hormona
Media	41.8	60.8
Desviación estándar	7.6	16.4

(a) Pruebe la hipótesis de que el incremento de peso en las ratas que reciben la hormona es significativamente superior que en las ratas control.

(b) ¿Los datos indican la violación de alguna suposición del análisis? Si es así, ¿cuál es la suposición que se viola?

2.2 En junio de 1975, se hicieron análisis químicos de 85 muestras de agua tomadas de varias partes de un lago con el propósito de determinar el contenido de cloro. Durante los siguientes dos inviernos se redujo el uso de sales de cloro en el área de captación del lago. En junio de 1977, se tomaron 110 muestras de agua del lago y se hicieron las determinaciones de cloro. La media y la desviación estándar para los dos conjuntos de datos se proporcionan en la siguiente tabla.

	Contenido de cloro en 1975	Contenido de cloro en 1977
Media	18.3	17.8
Desviación estándar	1.2	1.8

(a) ¿Los datos proporcionan fuerte evidencia de que existe una reducción del nivel promedio de cloro en el agua del lago en 1977 comparado con el nivel que tenía en 1975?

(b) Establezca un intervalo de confianza al 98 % para la diferencia entre los niveles medios de cloro en 1975 y 1977.

(c) Construya un intervalo de confianza al 95 % para el nivel promedio de cloro.

2.3 En referencia al ejercicio 2.1, supóngase que desea diseñar un experimento para estudiar el efecto de inyectar una hormona sobre la ganancia de peso de ratas preñadas durante la gestación. Si decide a 6 de las 12 ratas disponibles para el experimento y dedicar las otras 6 como control.

Brevemente explique por qué es importante dividir aleatoriamente las 12 ratas en dos grupos?, ¿Qué error estaría cometiendo en el diseño experimental si usted selecciona mediante algún criterio de preferencia personal a las 6 ratas que recibirán la hormona?

Supóngase que las 12 ratas son etiquetadas con los números enteros del 1 al 12 y que 12 canicas de igual apariencia son también numeradas del 1 al 12. ¿Cómo utilizaría estos sistemas de identificación con números para seleccionar las ratas a las que se aplicará la hormona?

2.4 Un proceso usado frecuentemente en la industria enlatadora de alimentos consiste en tratar a los vegetales con un volumen grande de agua caliente antes de enlatarlos. Se desarrolló un nuevo método que se espera remueva menos vitaminas y minerales de los vegetales ya que utiliza vapor de agua en lugar de flujos de agua como lo hace el método tradicional. Diez muestras de vegetales de diferentes granjas se usan para comparar los dos procesos de enlatado. La mitad de cada una de las muestras fue tratada con el método tradicional; la otra mitad con el método que utiliza vapor de agua. Las mediciones del contenido de vitaminas por libra de vegetales enlatados con ambos métodos son los siguientes:

	Muestra									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Metodo nuevo	35	48	65	33	61	54	49	37	58	65
Metodo estandar	33	40	55	41	62	54	40	35	59	56

¿Los datos proporcionan evidencia de que el método nuevo de enlatado de vegetales remueve menos vitaminas que el tradicional?

Construya un intervalo de confianza al 98 por ciento para la diferencia entre los contenidos medios de vitaminas del método nuevo y el estándar.

2.5 Se condujo un experimento para determinar si el uso de un aditivo químico especial agregado a un fertilizante estándar acelera el crecimiento de las plantas. Diez localidades se incluyeron en el estudio. En cada localidad dos plantas creciendo en sitios cercanos fueron tratadas: a una se le proporcionó el fertilizante estándar y a la otra el fertilizante estándar con el aditivo químico. El crecimiento de las plantas después de 4 semanas se registró en centímetros. Los datos proporcionan en la siguiente tabla.

	Localidad									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Sin aditivo	20	31	16	22	19	32	25	18	20	19
Con aditivo	23	34	15	21	22	31	29	20	24	23

¿Los datos proporcionan suficiente evidencia de que el uso del aditivo químico acelera el crecimiento de las plantas? Escriba el juego de hipótesis apropiado y establezca una prueba de hipótesis que rechace la nula con $\alpha = 0.05$.

2.6 Se realizó un experimento para comparar la viabilidad de semillas con o sin protección catódica. El procedimiento consiste en someter a las semillas a un conductor de cargas negativas. Las semillas de cierto tipo fueron aleatoriamente divididas en dos grupos de 250 cada uno. Un grupo fue sometido a protección catódica y el otro fue el grupo control. Ambos grupos se sometieron a altas temperaturas para inducir vejez artificial, después, todas las semillas se remojaron en agua y se pusieron a germinar. Se encontró que el 25 por ciento de las semillas control y 10 por ciento de las semillas con protección catódica no germinaron.

¿Los resultados experimentales proporcionan evidencia significativa de que la protección catódica permite una tasa de germinación alta en las condiciones experimentales descritas?

Construya un intervalo de confianza al 98 por ciento para la diferencia $p_T - p_C$, donde

p_T y p_C representan las tasas de germinación de semillas con tratamiento de protección catódica y control respectivamente.

2.7 Se condujo un experimento para comparar la precisión de dos marcas de detectores de mercurio en mediciones de concentración de mercurio en el aire. En una fecha determinada, al medio día en el centro de una ciudad se tomaron 7 mediciones de la concentración de mercurio con un instrumento de la marca A y 6 mediciones con un instrumento de la marca B. Las mediciones se registraron en unidades de microgramos por metro cúbico de aire. Estas mediciones son las siguientes:

Marca A	0.95	0.82	0.78	0.96	0.71	0.86	0.99
Marca B	0.89	0.91	0.94	0.91	0.90	0.89	

¿Los datos proporcionan fuerte evidencia de que la marca B proporciona mediciones de la concentración de mercurio en el aire más precisas que la marca A?

Construya un intervalo de confianza al 90 por ciento para el cociente de varianzas hecho con las marcas A y B.

2.8 La siguiente tabla muestra los niveles de carboxihemoglobina de un grupo de no fumadores y uno de fumadores de cigarrillos. Se muestran las medias muestrales y desviaciones estándar. Se supone que el nivel medio de carboxihemoglobina de los fumadores debe ser más alto que el nivel medio de los no fumadores. No hay razón para suponer que las varianzas de las poblaciones sean iguales.

Grupo	n	Carboxi hemoglobina (%)
No fumadores	121	$\bar{x} = 1.3, s = 1.3$
Fumadores	75	$\bar{x} = 4.1, s = 2.0$

Escriba el juego de hipótesis adecuado en la situación planteada. Lleve a cabo la prueba con un nivel de significancia de 0.05. ¿Qué concluye usted?

CAPÍTULO 3

DISEÑOS EXPERIMENTALES Y ANÁLISIS DE VARIANZA

Cuando se comparan dos poblaciones a través de dos muestras independientes o apareadas, se calcula un estadístico que tiene distribución t de Student. Cuando se comparan más de dos poblaciones, la técnica que se utiliza recibe el nombre de Análisis de Varianza. Aun cuando el objetivo que se persigue con este análisis es el de comparar medias de tratamientos, esta técnica desarrollada por Ronald A. Fisher (1919 – 1925), se sustenta en el análisis de la varianza. Para aclarar este punto se presenta a continuación un ejemplo ilustrativo:

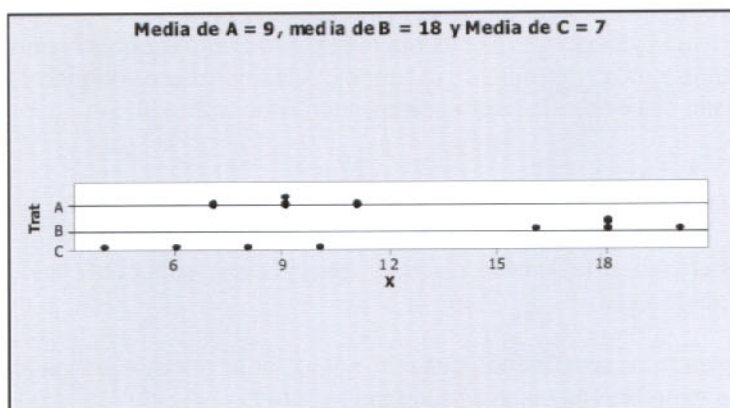
Ejemplo 3.1. Supóngase que se desea probar si la diferencia entre tres tratamientos (A, B, C) es significativa estadísticamente. En la Tabla 3.1 se presentan dos conjuntos de datos que representan dos situaciones experimentales diferentes

Tabla 3.1. Dos conjuntos de datos que representan dos situaciones experimentales diferentes

Conjunto 1			Conjunto 2		
A	B	C	A	B	C
7	16	4	1.5	4	1
9	18	6	3	12	11
9	18	8	3	18	3
11	20	10	9	21	7
			16.5	21	11
			21	25	19
				25	

$$\bar{X}_A = 9 \quad \bar{X}_B = 18 \quad \bar{X}_C = 7 \quad \bar{X}_A = 9 \quad \bar{X}_B = 18 \quad \bar{X}_C = 7$$

$$S_A^2 = 2.667 \quad S_B^2 = 2.667 \quad S_C^2 = 6.667 \quad S_A^2 = 65.707 \quad S_B^2 = 58.003 \quad S_C^2 = 49.604$$



3.1. Diagrama de dispersión del conjunto 1

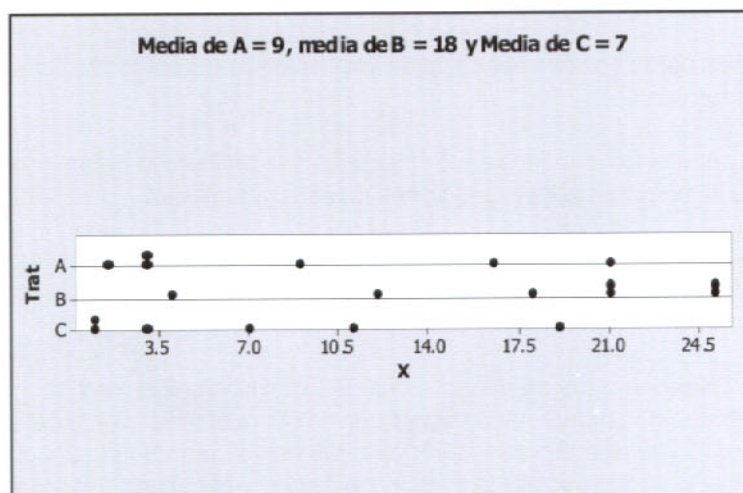


Figura 3.2. Diagrama de dispersión del conjunto 2.

El análisis del diagrama de puntos del conjunto (1) permite con facilidad concluir que existe diferencia significativa entre los tratamientos, pero en el conjunto (2) no, aun cuando las diferencias de medias son las mismas en ambos casos. La razón que tenemos para no concluir que existe diferencia significativa entre los tratamientos en el conjunto (2) se debe a que se ha analizado si la diferencia entre las medias es mayor de la que cabría esperar a partir de la variabilidad dentro de cada muestra. En el conjunto (1) esas diferencias sí son mayores de lo que cabría esperar, pero en el conjunto (2) no.

Lo que se ha hecho es un análisis de la variabilidad para decidir si las diferencias de medias son o no significativas. El procedimiento estadístico que se expone en esta sección formaliza este razonamiento en el denominado análisis de varianza. Antes de discutir este análisis, es necesario hacer una revisión de los conceptos propios de un diseño experimental.

Conceptos generales de un diseño experimental:

- Las unidades básicas en las cuales se mide una respuesta se denomina unidad experimental.
- Las distintas condiciones que son manipuladas por el investigador en las unidades experimentales se denominan factores.
- Las diferentes modalidades de la presencia de un factor se denominan niveles del factor.
- Cada combinación específica de los niveles de diferentes factores se denomina tratamiento.
- El número de unidades experimentales que reciben un tratamiento en particular se llama número de repeticiones de ese tratamiento.
- Si los niveles de un factor corresponden a una medida de la intensidad sobre una escala, el factor es cuantitativo. Cuando los niveles difieren solo por características cualitativas, se dice que el factor es cualitativo.

Ejemplo 3.2 Suponga que se desea estudiar a tres diferentes métodos de riego y dos niveles de fertilización nitrogenada y su influencia sobre el rendimiento del cultivo de chile en la Comarca Lagunera. En este caso, las unidades experimentales pueden ser parcelas de un tamaño tal que permita la evaluación de cada método de riego. Los factores son el método de riego y la fertilización nitrogenada. El número de tratamientos es $3 \times 2 = 6$.

Los niveles del factor método de riego son cualitativos y los niveles del factor fertilización nitrogenada son cuantitativos.

Los principales pasos en el diseño del trabajo experimental se pueden resumir de la siguiente manera:

1. Seleccionar los factores que se estudiarán, así como los niveles de cada factor que se asuman relevantes en la investigación. Esto define los tratamientos.

2. Considerando el alcance planeado para la inferencia, selecciónese el tipo de unidades experimentales sobre las cuales se aplicarán los tratamientos.
3. A partir del presupuesto, los recursos materiales y humanos y de la precisión deseada en la inferencia decidir cuantas unidades serán incluidas en el experimento.
4. Finalmente, determinar la manera en la cual los tratamientos serán asignados a las unidades experimentales (diseño experimental).

3.1. Análisis de varianza en el diseño completamente al azar

Requisitos para que el análisis sea válido:

1. Las muestras (datos de los tratamientos), cuyas medias se desee comparar, deben ser muestras aleatorias de sus correspondientes poblaciones. Lo anterior permite justificar independencia entre y dentro de las muestras. Además, es necesario que el material experimental (unidades experimentales) sea homogéneo y la asignación aleatoria de los tratamientos a las unidades experimentales se haga sin restricción.
2. Las poblaciones de las que proceden cada una de las muestras deben ser normales, aunque el método de análisis que se expondrá es robusto al incumplimiento de normalidad.
3. Todas las poblaciones de las que proceden las muestras deben tener la misma varianza. El análisis de varianza no es robusto al incumplimiento de la homogeneidad de varianzas.

Estructura de datos de un diseño completamente aleatorizado.

Tabla 3.2. Estructura de datos en un diseño completamente al azar.

		Tratamientos			
1	2	3	t	
Y_{11}	Y_{21}	Y_{31}		Y_{t1}	
Y_{12}	Y_{22}	Y_{32}		Y_{t2}	
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	
Y_{1n_1}	Y_{2n_2}	Y_{3n_3}		Y_{tn_t}	
$Y_{1\cdot}$	$Y_{2\cdot}$	$Y_{3\cdot}$		$Y_{t\cdot}$	Totales de tratamientos
$\bar{Y}_{1\cdot}$	$\bar{Y}_{2\cdot}$	$\bar{Y}_{3\cdot}$		$\bar{Y}_{t\cdot}$	Medias de tratamientos

Nótese que los totales de tratamientos se han representado por $Y_{1.}, Y_{2.}, \dots, Y_{t.}$. En la notación el punto que ocupa el espacio del segundo índice indica que se ha sumado sobre ese índice. De tal manera que en general se escribe:

$$Y_{i.} = \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}; \quad i = 1, 2, \dots, t$$

También:

$$\bar{Y}_{i.} = \frac{Y_{i.}}{n_i} = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{Y_{ij}}{n_i}; \quad i = 1, 2, \dots, t$$

Finalmente, la media general del experimento es

$$\bar{Y}_{..} = \frac{\sum_{i=1}^t Y_{i.}}{\sum_{i=1}^t n_i} = \frac{Y_{..}}{\text{número total de datos}}$$

El modelo lineal de un diseño completamente aleatorizado es:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}; \quad j = 1, 2, \dots, n_i; \quad i = 1, 2, \dots, t$$

$$\varepsilon_{ij} \sim NI(0, \sigma^2).$$

Donde:

Y_{ij} : representa la j-ésima unidad experimental con el tratamiento i-ésimo.

μ : media general, común a todas las unidades experimentales antes de aplicar los tratamientos.

τ_i : Efecto del i-ésimo tratamiento.

El análisis de varianza con el modelo lineal descrito tiene la finalidad de comparar el efecto de los t tratamientos utilizando el siguiente juego de hipótesis:

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_t \quad \text{vs} \quad H_f : \tau_i \neq \tau_j \text{ para al menos una } i \neq j$$

Con la notación descrita arriba, se procede a encontrar expresiones que particionen la variabilidad total del experimento en dos fuentes de variación; una dentro de cada muestra y la otra entre las muestras. Para obtener dicha partición se considera la igualdad:

$$\begin{array}{rcccl} Y_{ij} - \bar{Y}_{..} & = & (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.}) & + & (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}) \\ \text{Desviación} & & \text{Desviación debida al} & & \text{Desviación debida al} \\ \text{total} & = & \text{error} & + & \text{tratamiento} \end{array}$$

Dado que esta igualdad se cumple para todas las observaciones Y_{ij} ($j = 1, \dots, n_i; i = 1, \dots, t$), se puede escribir

$$\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} [(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.}) + (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})]^2$$

De donde:

$$\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2 + \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 + 2 \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}).$$

El doble producto del lado derecho de la ecuación anterior es cero, por lo que se obtiene la siguiente partición de la suma de cuadrados total (S. C. TOTAL):

$$\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2 + \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2$$

S.C. total = S.C. del error + S.C. tratamientos

Equivalentemente se puede escribir:

$$\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2 + \sum_{i=1}^t n_i (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2$$

S.C. Total = S.C. del total + S.C. tratamientos

Si cada una de estas sumas de cuadrados se divide entre el parámetro σ^2 se obtienen cantidades con propiedades distribucionales conocidas en la teoría estadística que se presentan sin prueba.

$$\frac{\text{S.C. error}}{\sigma^2} \sim \chi^2(\sum_{i=1}^t n_i - t)$$

Si $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots \tau_t$ es verdadera, entonces

$$\frac{\text{S.C. tratamientos}}{\sigma^2} \sim \chi^2(t-1)$$

Al dividir cada una de las expresiones anteriores entre los grados de libertad de su correspondiente ji-cuadrada, se obtienen los denominados cuadrados medios, es decir:

$$\text{cuadrado medio del error} = \text{C. M. E} = \frac{\text{S.C. del error}}{\sigma^2(\sum_{i=1}^t n_i - t)}$$

$$\text{cuadrado medio de tratamientos} = \text{C. M. T} = \frac{\text{S. C. de tratamientos}}{\sigma^2(t-1)}$$

Para entender la lógica de la prueba, a continuación se presentan, sin demostración, las esperanzas de los cuadrados medios

$$E(\text{C. M. T.}) = \sigma^2 + \frac{\sum_{i=1}^t n_i (\tau_i - \bar{\tau})^2}{t-1}, \quad \text{con } \bar{\tau} = \frac{\sum_{i=1}^t n_i \tau_i}{\sum_{i=1}^t n_i}$$

$$E(\text{C. M. E.}) = \sigma^2$$

La estadística de prueba es:

$$F_0 = \frac{\frac{\text{S.C. de tratamientos}}{\sigma^2(t-1)}}{\frac{\text{S.C. del error}}{\sigma^2(\sum_{i=1}^t n_i - t)}} = \frac{\frac{\text{S.C. de tratamientos}}{(t-1)}}{\frac{\text{S.C. del error}}{(\sum_{i=1}^t n_i - t)}}$$

La estadística de prueba, bajo el supuesto de que $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_t$ sea verdadera tiene distribución F con $(t-1)$ grados de libertad en el numerador y $(\sum_{i=1}^t n_i - t)$ grados de libertad en el denominador.

De acuerdo a las esperanzas de los cuadrados medios, si la hipótesis nula es falsa, entonces $F_0 > 1$ y por lo tanto la región de rechazo de H_0 se da en la cola derecha de la distribución de F . Formalmente la regla de decisión es:

Rechazar H_0 con un nivel de significancia α si, $F_0 \geq F_{(t-1), (\sum_{i=1}^t n_i - t)}(\alpha)$

Todo lo anterior se resume en la tabla de análisis de varianza.

Tabla 3.3 Análisis de varianza para el modelo:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}; \quad j = 1, 2, \dots, n_i; i = 1, 2, \dots, t$$

Fuente de Variación	Grados de libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrados Medios	F_0	Esperanza del Cuadrado Medio
Trat	$t - 1$	$\sum_{i=1}^t n_i (\bar{Y}_i - \bar{Y}_-)^2$	$\frac{\text{S.C.Trat}}{t - 1}$	$\frac{\text{C.M.Trat.}}{\text{C.M.error}}$	$\sigma^2 + \frac{\sum n_i (\tau_i - \bar{\tau})^2}{t - 1}$
Error	$\sum_{i=1}^t n_i - t$	$\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2$	$\frac{\text{S.C.error}}{\sum_{i=1}^t n_i - t}$		σ^2
Total	$\sum_{i=1}^t n_i - 1$	$\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_-)^2$			

Para probar: $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_t$ vs $H_1 : \tau_i \neq \tau_j$ para al menos una $i \neq j$

Rechazar H_0 con un nivel de significancia α si, $F_0 \geq F_{(t-1), (\sum n_i - t)}(\alpha)$.

A continuación se presenta la resolución del siguiente ejemplo a fin de que el lector se familiarice con las expresiones de las sumas de cuadrados.

Ejemplo 3.3 Se llevó a cabo un experimento para probar el efecto de un fertilizante nitrogenado sobre la producción de lechuga. Los tratamientos consistieron de cuatro dosis diferentes de nitrato de amonio en un diseño completamente al azar con diferente número de repeticiones por tratamiento (parcelas). Los datos son el número de lechugas cosechadas en cada parcela.

Tabla 3.4. Resumen de datos del experimento de lechuga.

Tratamientos Kg de N / Ha	Lechuga s/parcela	Medias de tratam. $\bar{Y}_{i.}$	n_i
0	100, 111, 95	102	3
100	147, 152, 156, 145	150	4
200	130, 140	135	2
$\bar{Y}_{..} = 130.667$			

$$\sum_{i=1}^t n_i (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 = n_1 (\bar{Y}_{1.} - \bar{Y}_{..})^2 + n_2 (\bar{Y}_{2.} - \bar{Y}_{..})^2 + n_3 (\bar{Y}_{3.} - \bar{Y}_{..})^2$$

$$= 3(102 - 130.667)^2 + 4(150 - 130.667)^2 + 2(135 - 130.667)^2$$

$$= 3(-28.667)^2 + 4(19.333)^2 + 2(4.333)^2$$

$$= 2465.39 + 1495 + 37.550 = 3997.94$$

$$\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2$$

$$= (Y_{11} - \bar{Y}_{1.})^2 + (Y_{12} - \bar{Y}_{1.})^2 + (Y_{13} - \bar{Y}_{1.})^2 + \dots + (Y_{31} - \bar{Y}_{3.})^2 + (Y_{32} - \bar{Y}_{3.})^2$$

$$= (100 - 102)^2 + (111 - 102)^2 + (95 - 102)^2 + \dots + (130 - 135)^2 + (140 - 135)^2$$

$$= (-2)^2 + (9)^2 + (-7)^2 + \dots + (-5)^2 + (5)^2 = 258$$

$$\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2$$

$$= (Y_{11} - \bar{Y}_{..})^2 + (Y_{12} - \bar{Y}_{..})^2 + (Y_{13} - \bar{Y}_{..})^2 + \dots + (Y_{31} - \bar{Y}_{..})^2 + (Y_{32} - \bar{Y}_{..})^2$$

$$\begin{aligned}
 &= (100 - 130.67)^2 + (111 - 130.67)^2 + (95 - 130.67)^2 + \dots + (130 - 130.67)^2 + (140 - 130.67)^2 \\
 &= (-30.67)^2 + (-19.67)^2 + (-35.67)^2 + \dots + (-0.67)^2 + (9.33)^2 = 4256
 \end{aligned}$$

Tabla 3.5. Análisis de varianza para el modelo: N

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}; j = 1, \dots, n_i; i = 1, 2, 3$$

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	F_0	$Pr > F$
Trat	2	3997.94	1998.97	46.49	0.0001
Error	6	258.00	43.00		
Total	8	4256.00			

Para probar:

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 \quad \text{vs} \quad H_1 : \text{al menos uno de los } \tau_1, \tau_2, \tau_3 \text{ es diferente al resto.}$$

Con un nivel de significancia $\alpha = 0.05$, de las tablas de F (Tabla F del anexo) con 2 y 6 grados de libertad en el numerador y el denominador respectivamente, se tiene que $F_{2,6}(0.05) = 5.143$. Por lo tanto, la regla de decisión es:

Se rechaza H_0 si $F_0 \geq 5.143$ y puesto que el valor de F_0 cae en la región de rechazo de H_0 , se concluye que existe evidencia experimental ($\alpha = 0.05$) de que al menos uno de los tratamientos es diferente a los otros dos. Nótese que la última columna en la Tabla 3.5 muestra el nivel observado de significancia, es decir, el valor mínimo del nivel de significancia para el que se rechaza H_0 dado que se obtuvo $F_0 = 46.49$. La mayoría de los programas de cómputo para análisis de varianza incluyen este valor de probabilidad para el estadístico F en la presentación de resultados.

3.2. Análisis de varianza de un diseño completamente al azar con igual número de repeticiones en los tratamientos

Aun cuando se presenta este diseño abordando el caso más general en el que existe

diferente número de repeticiones por tratamiento, siempre conviene en lo posible trabajar con diseños balanceados, es decir con el mismo número de repeticiones por tratamiento. A continuación se presenta la tabla del análisis de varianza para un experimento completamente al azar e igual número de repeticiones por tratamiento.

Tabla 3.6 Análisis de varianza para el modelo:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}; \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad i = 1, 2, \dots, t$$

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	F_0	Esperanza del cuadrado medio
Trat	$t - 1$	$n \sum_{i=1}^t (\bar{Y}_i - \bar{Y}_..)^2$	$\frac{\text{S.C. trat}}{t - 1}$	$\frac{\text{C.M. trat.}}{\text{C.M. error}}$	$\sigma^2 + \frac{n \sum (\tau_i - \bar{\tau})^2}{t - 1}$
Error	$t(n - 1)$	$\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_i.)^2$	$\frac{\text{S.C. error}}{t(n - 1)}$		σ^2
Total	$tn - 1$	$\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_..)^2$			

3.3. Comparación de tratamientos

Como se acaba de ver, el análisis de varianza solo responde a una parte del objetivo de la investigación. El problema de saber cuales τ_i están produciendo el rechazo de $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_t$ fue abordado por Fisher quien consideró C_2^t pruebas de t de Student, formando todas las comparaciones posibles entre tratamientos, dando así inicio a las técnicas conocidas como Comparaciones Múltiples.

Por otro lado, la teoría de los modelos lineales permite seleccionar conjuntos de tratamientos de manera que las comparaciones entre ellos respondan a las interrogantes de la investigación. Dichas comparaciones planeadas se denominan contrastes planeados. A continuación se abordan estas dos técnicas.

3.3.1 Contrastes planeados

Un contraste es una combinación lineal de los efectos de los tratamientos, en los que los coeficientes suman cero. Es decir,

$$\phi = \sum_{i=1}^t c_i \tau_i; \quad \sum_{i=1}^t c_i = 0$$

El contraste anterior se estima mediante

$$\hat{\phi} = \sum_{i=1}^t c_i \bar{Y}_i.$$

Para el caso del modelo $Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}; j = 1, \dots, n_i; i = 1, 2, 3$

Con $\varepsilon_{ij} \sim \text{NI}(0, \sigma^2)$

$$\bar{Y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}}{n_i} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (\mu + \tau_i + \varepsilon_{ij})}{n_i} = \mu + \tau_i + \bar{\varepsilon}_i. \text{ Por lo tanto, se puede escribir}$$

$$\hat{\phi} = \sum_{i=1}^t c_i \bar{Y}_i = \sum_{i=1}^t c_i (\mu + \tau_i + \bar{\varepsilon}_i) = \mu \sum_{i=1}^t c_i + \sum_{i=1}^t c_i \tau_i + \sum_{i=1}^t c_i \bar{\varepsilon}_i.$$

Pero ya que $\sum_{i=1}^t c_i = 0$ se tiene que $\hat{\phi} = \sum_{i=1}^t c_i \bar{\varepsilon}_i$.

En este paso se requiere conocer cuál es la distribución de $\bar{\varepsilon}_i$, para lo cual se citan los siguientes teoremas. En cada uno de ellos $a_i; i = 1, 2, \dots, n$ son constantes conocidas.

Teorema 1. Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias independientes con media μ y varianza constante σ^2 . Entonces

$$\sum_{i=1}^n a_i X_i \text{ tiene media } \mu \sum_{i=1}^n a_i \text{ y varianza } \sigma^2 \sum_{i=1}^n a_i^2$$

Teorema 2. Sea X_1 una variable aleatoria con media μ_1 y varianza σ_1^2

Sea X_2 una variable aleatoria con media μ_2 y varianza σ_2^2

⋮
⋮

Sea X_n una variable aleatoria con media μ_n y varianza σ_n^2

Entonces $\sum_{i=1}^n a_i X_i$ tiene media $\sum_{i=1}^n a_i \mu_i$ y varianza $\sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2$

Teorema 3. Si X_i es una variable aleatoria con distribución

$N(\mu_i, \sigma_i^2)$ para $i = 1, 2, \dots, n$, entonces $\sum_{i=1}^n a_i X_i \sim N(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i, \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2)$

Aplicando el Teorema 3 a $\bar{\varepsilon}_i$, se tiene $\text{Var}(\bar{\varepsilon}_i) = \sigma^2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{n_j^2} = \sigma^2 \frac{n_i}{n_i^2} = \frac{\sigma^2}{n_i}$

Por lo tanto $\bar{\varepsilon}_i \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{n_i}\right); i = 1, 2, \dots, t$ y entonces

$\sum_{i=1}^t c_i \bar{\varepsilon}_i \sim N\left(0, \sum_{i=1}^t \frac{c_i^2 \sigma^2}{n_i}\right)$ y así, ϕ es insesgado y $\phi \sim N\left(\phi, \sum_{i=1}^t \frac{c_i^2 \sigma^2}{n_i}\right)$

El error estándar de un contraste denotado por σ_ϕ es

$$\sigma_\phi = \sqrt{\sum_{i=1}^t \frac{c_i^2 \sigma^2}{n_i}}$$

Cuyo estimador es

$$\sigma_{\phi} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^t c_i^2 \text{CME}}{n_i}}$$

Si $n_i = n$

$$\sigma_{\phi} = \sqrt{\frac{\text{CME}}{n} \sum_{i=1}^t c_i^2} \quad 3.1$$

Donde CME es el cuadrado medio del error en el análisis de varianza.

Para probar el juego de hipótesis: $H_0 : \phi = \phi_0$ vs $H_1 : \phi \neq \phi_0$

Se utiliza la estadística

$$t_0 = \frac{\phi - \phi_0}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^t c_i^2 \text{CME}}{n_i}}} \sim \text{según una } t \text{ de Student con los grados de libertad del CME}$$

La regla de decisión es:

$$\text{Si } |t_0| = \frac{|\phi - \phi_0|}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^t c_i^2 \text{CME}}{n_i}}} \geq t(\text{g.l. del error})_{\alpha/2} \text{ se rechaza } H_0 \text{ si no, no}$$

En la práctica $\phi_0 = 0$

Intervalo de confianza para un contraste:

$$\left[\phi - t(\text{g.l. del error})_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^t c_i^2 \text{CME}}{n_i}} \leq \phi \leq \phi + t(\text{g.l. del error})_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^t c_i^2 \text{CME}}{n_i}} \right]$$

Ejemplo 3.4 Con el fin de comparar el efecto de diferentes cantidades y tipos de azúcares en plantas de tomate, se cultivaron secciones de tejido de plantas de tomate sometidas a tres diferentes tipos de azúcares y un control. Se dispuso de 20 secciones en las que se aleatorizaron sin restricción los 4 tratamientos. El crecimiento de tejidos en cada cultivo en $mm \times 10$ es la variable respuesta.

Tabla 3.7. Resumen de datos del experimento en tomate.

	Control= τ_1	3% de glucosa= τ_2	3% de Fructuosa= τ_3	3% de Sacarosa= τ_4
	45	25	28	31
	39	28	31	37
	40	30	24	35
	45	29	28	33
	42	33	27	34
Total	211	145	138	170
Medias	42.2	29	27.6	34
Media general	33.2			

- Obtenga la tabla del análisis de varianza.
- Mediante un contraste compare la media del tratamiento control contra el promedio de las medias de los otros tratamientos. Use $\alpha = 0.02$
- Con un contraste compare la media de glucosa con la media de sacarosa. Use $\alpha = 0.05$
- Obtenga un intervalo de confianza del 95 por ciento para el contraste del inciso b).

Solución:

- a) Las sumas de cuadrados se simplifican cuando el número de repeticiones por tratamiento es el mismo.

$$\sum_{i=1}^t n(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 = 5 \times [(42.2 - 33.2)^2 + (29 - 33.2)^2 + (27.6 - 33.2)^2 + (34 - 33.2)^2]$$

$$= 5 \times 130.64 = 653.2$$

$$\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2 = 30.8 + 34 + 25.2 + 20 = 110$$

$$\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = (45 - 33.2)^2 + (39 - 33.2)^2 + \dots + (33 - 33.2)^2 + (34 - 33.2)^2 = 763.2$$

Tabla 3.8. Análisis de varianza para el modelo:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}; j = 1, \dots, 5; i = 1, \dots, 4$$

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrados Medios	F_0	$Pr > F$
Trat	3	653.0	217.7333	31.67	< 0.0001
Error	16	110.0	6.8750		
Total	19	763.2			

Para probar:

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 \quad \text{vs} \quad H_f : \text{al menos uno de los } \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 \text{ es diferente al resto}$$

Como se observa en la tabla, el nivel observado de significancia indica el rechazo de H_0 y se procede con la comparación de los tratamientos mediante los contrastes planeados.

- b) La estimación del contraste es:

$$\phi = 3 \times \bar{Y}_1. + (-1) \times \bar{Y}_2. + (-1) \times \bar{Y}_3. + (-1) \times \bar{Y}_4.$$

$$\phi = 3 \times 42.2 + (-1) \times 29 + (-1) \times 27.6 + (-1) \times 34 = 36$$

$$t_0 = \frac{\phi - 0}{\sqrt{\frac{[3^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2] \times \text{CME}}{5}}} = \frac{36}{\sqrt{\frac{12 \times 6.875}{5}}} = \frac{36}{4.062} = 8.8226$$

El cuantil de t es $t(16)_{0.01} = 2.5835$, valor que se puede obtener de la Tabla D del Anexo.

Se rechaza H_0 con $\alpha = 0.02$ si $|t_0| \geq 2.5835$. Ya que el valor de la estadística cae en la zona de rechazo, se concluye que el crecimiento promedio de los tejidos de tomate del tratamiento control es superior al promedio de las medias de los tres tratamientos.

c) La estimación del contraste es:

$$\phi = (0) \times \bar{Y}_1. + (+1) \times \bar{Y}_2. + (0) \times \bar{Y}_3. + (-1) \times \bar{Y}_4.$$

$$\phi = (0) \times 42.2 + (+1) \times 29 + (0) \times 27.6 + (-1) \times 34 = 29 - 34 = -5$$

$$t_0 = \frac{\phi - 0}{\sqrt{\frac{[0^2 + (+1)^2 + (0)^2 + (-1)^2] \times \text{CME}}{5}}} = \frac{-5}{\sqrt{\frac{2 \times 6.875}{5}}} = \frac{-5}{1.6583} = -3.02$$

El cuantil de t es $t(16)_{0.025} = 2.12$

Se rechaza H_0 con $\alpha = 0.05$ si $|t_0| \geq 2.12$. Ya que el valor de la estadística cae en la zona de rechazo, se concluye que la media de sacarosa es superior a la de fructuosa a un nivel $\alpha = 0.05$.

d) La estimación del contraste es: $\phi = 36$

El error estándar del contraste es:

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^t c_i^2 \text{CME}}{n}} = \sqrt{\frac{[3^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2] \times 6.875}{5}} = 4.062$$

El cuantil de t es: $t(16)_{\alpha/2} = t(16)_{0.025} = 2.12$

El intervalo de confianza solicitado es:

$$(36 - 2.12 \times 4.062, 36 + 2.12 \times 4.062) \text{ o } (27.39, 44.61)$$

3.3.2 Contrastes ortogonales

Si en un experimento se tienen t tratamientos, se definen dos contrastes:

$$\varphi_a = \sum_{i=1}^t a_i \tau_i \quad \text{y} \quad \varphi_b = \sum_{i=1}^t b_i \tau_i$$

Se dice que φ_a y φ_b son ortogonales si $\sum_{i=1}^t \frac{a_i b_i}{n_i} = 0$

Si $n_i = n$ entonces la condición de ortogonalidad es $\sum_{i=1}^t a_i b_i = 0$

Teorema 4. La suma de cuadrados de tratamientos se puede descomponer en $t - 1$ contrastes ortogonales entre sí.

Suma de cuadrados de un contraste. Sea $\varphi = \sum_{i=1}^t c_i \tau_i$ un contraste, y sea su estimador

$$\hat{\varphi} = \sum_{i=1}^t c_i \bar{Y}_i. \quad \text{Para probar}$$

$$H_0 : \varphi = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \varphi \neq 0$$

Se usa la estadística:

$$t_0 = \frac{\phi}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^t c_i^2 \text{CME}}{n_i}}} \text{ si } H_0 \text{ es verdadera } t_0^2 \sim F_{1, \text{G.L. Error}}$$

$$t_0^2 = \frac{\phi^2}{\text{CME} \frac{\sum_{i=1}^t c_i^2}{n_i}} = \frac{\frac{\phi^2}{\sum_{i=1}^t \frac{c_i^2}{n_i}}}{\text{CME}} = \frac{\text{Cuadrado medio del contraste}}{\text{CME}} = F_0$$

El numerador de la expresión anterior es la suma de cuadrados del contraste asociado a un grado de libertad. Es decir,

$$\text{S.C. de } \phi = \frac{\phi^2}{\sum_{i=1}^t \frac{c_i^2}{n_i}}$$

Si $n_i = n$ entonces la suma de cuadrados del contraste ϕ es:

$$\text{S.C. de } \phi = \frac{n \times \phi^2}{\sum_{i=1}^t c_i^2}$$

Nótese que cada contraste tiene un grado de libertad. Si se definen:

$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_1, \dots, \phi_{t-1}$ que sean ortogonales, y se obtienen las sumas de cuadrados para cada contraste:

$$\text{S.C. de } \phi_1 = \frac{\phi_1^2}{\sum_{i=1}^t \frac{c_{1i}^2}{n_i}}$$

$$\text{S.C. de tratamientos} = \sum_{l=1}^{t-1} \text{S.C. de } \varphi_l$$

La partición de la suma de cuadrados de tratamientos, mediante la suma de cuadrados de $t - 1$ contrastes ortogonales, es una propiedad que se utilizará más adelante, para obtener la suma de cuadrados de los efectos en los diseños de tratamientos factoriales.

No obstante que los contrastes ortogonales son independientes, las F_0 parciales no lo son, ya que todas se forman al dividir por el C. M. E. Debido a esto, si un investigador prueba demasiados contrastes, se puede cometer, en al menos uno de ellos, un error tipo I de importancia. Para evitar este problema se recomienda establecer un intervalo de confianza simultáneo de Scheffé válido para cualquier contraste φ_l

$$\left[\varphi_l \pm (t-1) \times F_{(t-1), (\text{G.L. del Error})}(\alpha) \times \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^t c_{li}^2 \text{CME}}{n_i}} \right]$$

Con este contraste es factible probar algunos contrastes buscando encontrar significado.

Ejemplo 3.5 Con relación al ejemplo 3.4 defina un conjunto de 3 contrastes ortogonales y compruebe que la suma de sus sumas de cuadrados, es igual a la suma de cuadrados de tratamientos.

Solución. Considere el siguiente conjunto de contrastes:

$$\varphi_a = \tau_2 + \tau_4 - \tau_1 - \tau_3$$

$$\varphi_b = \tau_3 + \tau_4 - \tau_1 - \tau_2$$

$$\varphi_c = \tau_4 + \tau_1 - \tau_2 - \tau_3$$

Nótese que

$$\sum_{i=1}^t a_i b_i = (-1) \times (-1) + 1 \times (-1) + (-1) \times 1 + 1 \times 1 = 1 + (-1) + (-1) + 1 = 0$$

$$\sum_{i=1}^t a_i c_i = (-1) \times 1 + 1 \times (-1) + (-1) \times (-1) + 1 \times 1 = -1 + (-1) + 1 + 1 = -2 + 2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^t b_i c_i = (-1) \times 1 + (-1) \times (-1) + 1 \times (-1) + 1 \times 1 = -1 + 1 + (-1) + 1 = 0$$

Por lo tanto son ortogonales entre sí, y se procede a obtener las estimaciones de los mismos.

$$\phi_a = \sum_{i=1}^t a_i \bar{Y}_i = (-1) \times 42.2 + 1 \times 29 + (-1) \times 27.6 + 1 \times 34 = -6.8$$

$$\phi_b = \sum_{i=1}^t b_i \bar{Y}_i = (-1) \times 42.2 + (-1) \times 29 + 1 \times 27.6 + 1 \times 34 = -9.6$$

$$\phi_c = \sum_{i=1}^t c_i \bar{Y}_i = 1 \times 42.2 + (-1) \times 29 + (-1) \times 27.6 + 1 \times 34 = 19.6$$

Cálculo de la suma de cuadrados de cada contraste.

$$\text{S.C de } \phi_a = \frac{5 \times \phi_a^2}{\sum_{i=1}^t a_i^2} = \frac{5 \times (-6.8)^2}{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \frac{231.2}{4} = 57.8$$

$$\text{S.C de } \phi_b = \frac{5 \times \phi_b^2}{\sum_{i=1}^t b_i^2} = \frac{5 \times (-9.6)^2}{4} = \frac{460.9}{4} = 115.2$$

$$\text{S.C de } \phi_c = \frac{5 \times \phi_c^2}{\sum_{i=1}^t c_i^2} = \frac{5 \times (-19.6)^2}{4} = \frac{1920}{4} = 480.2$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \text{S.C. de tratamientos} &= \sum_{l=1}^{t-1} \text{S.C. de } \varphi_l \\ &= \text{S.C. de } \varphi_a + \text{S.C. de } \varphi_b + \text{S.C. de } \varphi_c = 57.8 + 115.2 + 480.2 = 653.2 \end{aligned}$$

Esa es la cantidad reportada como suma de cuadrados de tratamientos en la tabla del análisis de varianza.

3.3.3 Comparaciones múltiples

Si en el análisis de varianza se rechaza H_0 y el investigador está interesado en una comparación simultánea de los tratamientos, se puede pensar en construir intervalos de confianza individuales a un determinado nivel de significancia α , y decidir que aquellos pares de medias cuyo intervalo no cubre a cero pertenecen a poblaciones con medias diferentes. El problema es que el conjunto de intervalos de confianza no son independientes y, en consecuencia, el nivel de significancia de la prueba conjunta es mayor que α . Este problema ha sido abordado por diversos autores dando lugar a las pruebas de comparaciones múltiples que se conocen en la actualidad. En este libro solo se abordan la prueba de Scheffé por las siguientes consideraciones:

1. El método de Scheffé está íntimamente ligado al concepto de contraste.
2. Usa las tablas de F que son fáciles de adquirir. Y la prueba es fácil de aplicar.
3. Es la más estricta y mantiene el nivel de significancia global a ser menor o igual al nivel de significancia deseado por el investigador.

Desarrollo:

Recuérdese que un contraste está definido por $\phi = \sum_{i=1}^t c_i \tau_i$

Cuyo estimador es: $\hat{\phi} = \sum_{i=1}^t c_i \bar{y}_i$

En el caso de comparar dos medias se escribe:

$$\phi = \bar{y}_i - \bar{y}_j$$

El procedimiento consiste en calcular el estimador del error estándar del contraste para comparar dos medias.

$$\sigma_{\phi} = \sqrt{\text{CME} \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$$

Este error estándar se incorpora a la prueba de Scheffé.

Prueba de Scheffé.

Para probar $H_0 : \tau_i = \tau_j$ en un experimento con diferente número de repeticiones por tratamiento, la regla de decisión es:

$$\text{Si } |\bar{y}_i - \bar{y}_j| \geq \sqrt{(t-1)F_{(t-1), \text{gl.Error}}(\alpha) \times \text{CME} \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)} \quad \text{se rechaza } H_0, \text{ si no, no.}$$

Donde $F_{(t-1), \text{gl.Error}}(\alpha)$ es el cuantil de la F de Snedecor con $(t-1)$ grados de libertad en el numerador y (gl Error) en el denominador y con α , el nivel de significancia global para el conjunto de contrastes.

Si el experimento tiene igual número de repeticiones por tratamiento, entonces la regla de decisión es:

$$\text{Si } |\bar{y}_i - \bar{y}_j| \geq \sqrt{(t-1)F_{(t-1), \text{gl.Error}}(\alpha) \times \frac{2 \times \text{CME}}{n}} \quad \text{se rechaza } H_0, \text{ si no, no}$$

Comentarios generales sobre las pruebas de comparaciones múltiples.

1. Para comparar dos tratamientos las pruebas son equivalentes, pero en la medida que se quieren comparar más de dos tratamientos usando un α global, entonces las diferencias entre estos procedimientos se empiezan a acentuar en la medida que aumenta el número de tratamientos. En base a un nivel de significancia global dado, las principales pruebas se pueden ordenar de (-) a (+) α como se indica: (-) Scheffé Tukey SNK Duncan DMS (+).

1. Las pruebas protegidas son aquellas que se realizan habiendo probado la hipótesis $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_t$ mediante la F que proporciona el análisis de varianza. El caso más inapropiado sería el de aplicar DMS, sin haber probado la hipótesis $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_t$.

3.4. Verificando las suposiciones del Análisis de Varianza

La validez del análisis de varianza depende de que los errores experimentales sean independientes, sigan una distribución normal con media igual a cero y tengan una varianza común σ^2 para todos los tratamientos. Cualquier incumplimiento de alguno de estos supuestos afecta tanto a los niveles de significancia como a la sensibilidad de las pruebas de F y de t . Es frecuente que ante el incumplimiento de alguna suposición, el verdadero nivel de significancia sea mayor que el que se obtiene en el análisis, dando origen a demasiados resultados significativos. En esta sección se revisan algunos métodos para verificar los supuestos de normalidad y de homogeneidad de varianzas, así como algunas transformaciones de datos que han demostrado ser de utilidad para homogenizar varianzas o normalizar la variable respuesta.

3.4.1 Verificando el supuesto de homogeneidad de varianzas

Se utilizan métodos gráficos y pruebas estadísticas. Ambos procedimientos se basan en los residuales observados. Los residuales son estimaciones de los errores experimentales que se definen como la diferencia entre las observaciones y las medias de los tratamientos, es decir:

$$\hat{e}_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_i.$$

3.4.1.1 Método gráfico

El diagnóstico de homogeneidad de varianzas se puede hacer graficando los residuales contra las medias de los tratamientos. Esta técnica se explica mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.6 Un Ingeniero Agrónomo estuvo interesado en estudiar cómo se distribuyen los individuos de determinada especie en el espacio en el que habitan. Él planteó la hipótesis de que, en el caso de la candelilla, la competencia por los nutrientes y luz solar afecta la distribución espacial de la población. El Ingeniero contó el número de plantas de candelilla en 25 secciones, seleccionadas al azar de cada una de 6 regiones ecológicas. Los datos se presentan en la siguiente tabla.

Tabla 3.9. Conteos de candelilla en 6 regiones ecológicas.

Región	Conteo
1	2, 23, 230, 45, 20, 12, 0, 73, 11, 0, 17, 21, 0, 9, 81, 103, 27, 45, 65, 33, 11, 7, 0, 3, 0
2	8, 55, 0, 24, 5, 6, 2, 141, 16, 3, 12, 6, 416, 0, 0, 203, 123, 4, 144, 10, 55, 1, 0, 14, 460
3	2, 5, 246, 52, 0, 4, 0, 405, 4, 1, 5, 4, 0, 6, 105, 313, 24, 14, 18, 0, 36, 4, 1, 13, 0
4	0, 10, 81, 21, 28, 0, 1, 0, 2, 5, 2, 0, 0, 2, 12, 8, 2, 3, 30, 12, 1, 4, 2, 0, 0
5	0, 9, 93, 5, 26, 1, 0, 0, 2, 2, 2, 1, 0, 3, 1, 4, 30, 3, 19, 13, 2, 29, 1, 2, 1
6	0, 22, 94, 16, 43, 4, 0, 4, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 6, 19, 3, 4, 63, 22, 5, 4, 0, 2, 0

El resumen estadístico para elaborar la gráfica de los residuales contra las medias de las regiones ecológicas es la siguiente:

Tabla 3.10. Resumen estadístico de los datos del experimento de candelilla.

Región	n	Media	Desv. Estandar	Residuales de las primeras 6 secciones de la región 1.				
				Región	Sección	y_{1j}	$\bar{y}_{1\cdot}$	\hat{e}_{1j}
1	25	33.52	49.83	1	1	2	33.52	-31.52
2	25	68.32	124.57	1	2	23	33.52	-10.52
3	25	50.48	107.09	1	3	230	33.52	196.48
4	25	9.04	17.28	1	4	45	33.52	11.48
5	25	9.96	19.66	1	5	20	33.52	-13.52
6	25	12.56	22.77	1	6	12	33.52	-21.52

La gráfica de residuales contra medias de región se presenta a continuación.

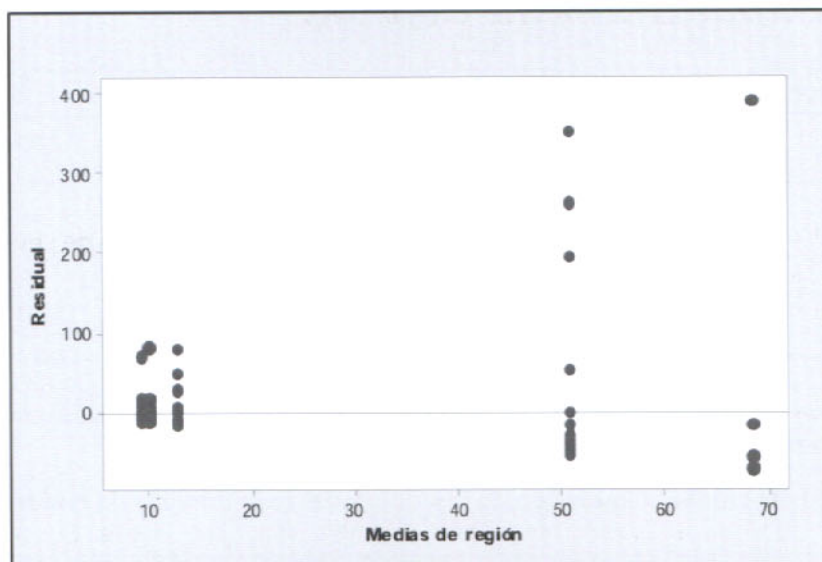


Figura 3.3. Gráfica de residuos versus las medias de región para las muestras del estudio sobre candelilla

La tendencia en esta gráfica revela que a medida que se incrementa la media estimada del número de individuos en cada región, la dispersión de los residuos también aumenta. La falta de simetría de los residuos alrededor de la recta "Residual = 0" indica una distribución asimétrica de las observaciones a la derecha y por lo tanto arroja un dato de no normalidad de las observaciones.

3.4.1.2 Pruebas estadísticas para diagnosticar homogeneidad de varianzas

Prueba de Levene

Existen más de 50 pruebas para homogeneidad de varianzas disponibles para diseños completamente aleatorizados, sin embargo, la que se recomienda en este libro es la prueba de Levene y algunas de sus modificaciones, ya que su precisión no depende de la distribución de las observaciones. Esta prueba consiste en transformar los valores originales de la variable dependiente en datos de dispersión y entonces realizar un análisis de varianza de esta variable. El nivel observado de significancia para la prueba de homogeneidad de varianza es el que proporciona la prueba de F en el análisis de la variable de dispersión.

La variable de dispersión de la prueba de Levene (1969) es:

$$z^2_{ij} = (y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot})^2 \text{ o bien } z_{ij} = |y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot}|$$

Prueba O'Brien

O'Brien (1979) propuso una prueba que es una modificación a la prueba de Levene con z^2_{ij} usando la variable de dispersión:

$$z^W_{ij} = \frac{(W + n_i - 2)n_i(y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot})^2 - W(n_i - 1)\sigma^2_i}{(n_i - 1)(n_i - 2)}$$

Donde: n_i es el tamaño del i -ésimo grupo y σ^2_i es su varianza muestral. Se puede usar el valor W para compensar la posible curtosis de los datos. La selección de W no es crítico en el análisis. O'Brien sugiere usar $W=0.50$ (1979, 1981).

Finalmente Brown y Forsythe (1974) sugirieron utilizar los valores absolutos de las desviaciones con respecto a las medianas de grupo.

$$z^{BF}_{ij} = |y_{ij} - m_i|$$

Donde m_i es la mediana del i -ésimo grupo.

Ejemplo 3.7 La prueba estadística de homogeneidad de varianzas se ilustra con los datos del ejemplo 3.6 mediante el siguiente programa SAS.

```
DATA HOVTEST1;
INPUT REGION CONTEO @@;
CARDS;
1 2 1 23 1 230 1 45 1 20 1 12 1 0 1 73 1 11 1 0 1 17 1 21 1 0 1 9 1 81 1 103 1 27
1 45 1 65 1 33 1 11 1 7 1 0 1 3 1 0
2 8 2 55 2 0 2 24 2 5 2 6 2 2 2 141 2 16 2 3 2 12 2 6 2 416 2 0 2 0 2 203 2 123 2 4
2 144 2 10 2 55 2 1 2 0 2 14 2 460
3 2 3 5 3 246 3 52 3 0 3 4 3 0 3 405 3 4 3 1 3 5 3 4 3 0 3 6 3 105 3 313 3 24 3 14 3 18
3 0 3 36 3 4 3 1 3 13 3 0
```

4 0 4 10 4 81 4 21 4 28 4 0 4 1 4 0 4 2 4 5 4 2 4 0 4 0 4 2 4 12 4 8 4 2 4 3 4 30 4
 12 4 1 4 4 4 2 4 0 4 0
 5 0 5 9 5 93 5 5 5 26 5 1 5 0 5 0 5 2 5 2 5 2 5 1 5 0 5 3 5 1 5 4 5 30 5 3 5 19 5 13 5 2
 5 29 5 1 5 2 5 1
 6 0 6 22 6 94 6 16 6 43 6 4 6 0 6 4 6 0 6 0 6 3 6 0 6 0 6 6 6 19 6 3 6 4 6 63 6 22 6
 5 6 4 6 0 6 2 6 0;

PROC GLM; CLASS REGION; MODEL CONTEO = REGION;
 MEANS REGION / HOVTEST = LEVENE;
 MEANS REGION / HOVTEST = OBRIEN;
 MEANS REGION / HOVTEST = BF;
RUN;

Fuente	DF	Suma de Cuadrados	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
Modelo	5	76070.2733	15214.0547	2.98	0.0138
Error	144	736164.0000	5112.2500		
Total	149	812234.2733			

Correcto

R-Cuadrado Coef Var Raiz MSE CONTEO Media
 0.093656 233.3043 71.50000 30.64667

Fuente	DF	Tipo I SS	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
REGION	5	76070.27333	15214.05467	2.98	0.0138

Test de Levene para homogeneidad de la varianza CONTEO
 ANOVA de las desviaciones cuadradas de las medias de grupo

Fuente	DF	Suma de cuadrados	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
REGION	5	5.1196E9	1.0239E9	2.74	0.0214
Error	144	5.384E10	3.7388E8		

Procedimiento GLM

Nivel de REGION	-----CONTEO-----		
	N	Media	Dev std
1	25	33.5200000	49.828974
2	25	68.3200000	124.571506
3	25	50.4800000	107.092297
4	25	9.0400000	17.280721
5	25	9.9600000	19.664859
6	25	12.5600000	22.768912

Procedimiento GLM

Test de O'Brien para homogeneidad de la varianza CONTEO
ANOVA de variable de extensión de O'Brien, W = 0.5

Fuente	DF	Suma de Cuadrados	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
REGION	5	5.5551E9	1.1111E9	2.62	0.0265
Error	144	6.099E10	4.2352E8		

Procedimiento GLM

Nivel de REGION	-----CONTEO-----		
	N	Media	Dev std
1	25	33.5200000	49.828974
2	25	68.3200000	124.571506
3	25	50.4800000	107.092297
4	25	9.0400000	17.280721
5	25	9.9600000	19.664859
6	25	12.5600000	22.768912

Test Brown y Forsythe para la homogeneidad de la varianza CONTEO
ANOVA de desviaciones absolutas de las medianas de grupo

Fuente	DF	Suma de Cuadrados	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
REGION	5	70398.8	14079.8	2.93	0.0150
Error	144	691690	4803.4		

Procedimiento GLM

Nivel de REGION	N	Media	Dev std
1	25	33.5200000	49.828974
2	25	68.3200000	124.571506
3	25	50.4800000	107.092297
4	25	9.0400000	17.280721
5	25	9.9600000	19.664859
6	25	12.5600000	22.768912

Para realizar la o las pruebas de homogeneidad de varianzas con SAS, se invoca PROC GLM y después de escribir el modelo reducido para un diseño completamente al azar se procede con la sentencia MEANS que cuenta con la opción HOVTEST. Esta opción se ejecuta para las diferentes pruebas según muestra el programa anterior.

Interpretación: El nivel observado de significancia para rechazar la hipótesis de homogeneidad de varianza para las pruebas de Levene, O'Brien y Brown & Forsythe son:

Tabla 3.11. Niveles observados de significancia de tres pruebas estadísticas para rechazar la hipótesis de homogeneidad de varianzas.

Prueba	Pr > F
Levene	0.0214
O'Brien	0.0265
Brown & Forsythe	0.0150

Las tres pruebas rechazan la hipótesis de homogeneidad de varianzas a un $\alpha \geq 0.0265$. Se concluye que las varianzas son diferentes entre las regiones.

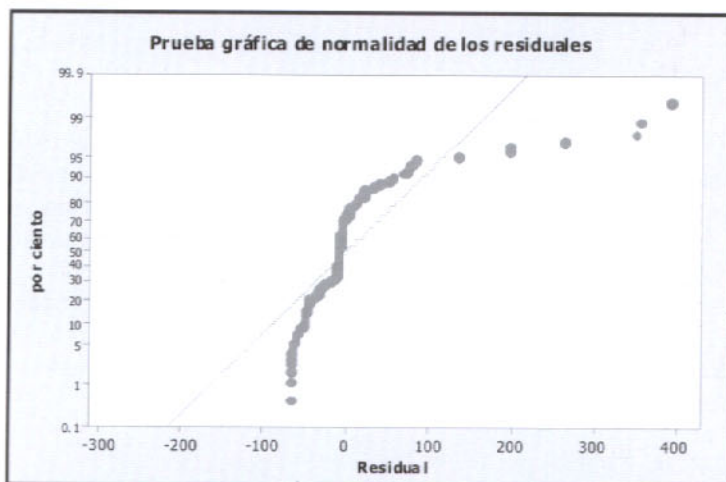
3.4.2. Verificando el supuesto de normalidad

Esta verificación se puede hacer mediante pruebas gráficas y pruebas estadísticas. Se aconseja realizar ambas porque en algunos casos se complementan en el análisis.

3.4.2.1 Pruebas gráficas de normalidad

Antes de abordar este tema, conviene recordar que el análisis de varianza es robusto con respecto al supuesto de normalidad. Es decir, divergencias pequeñas respecto a la normalidad no afectan sensiblemente la validez de las inferencias del análisis.

Ejemplo 3.8. Continuando con el análisis de los datos del Ejemplo 3.6, la gráfica de residuales contra las medias estimadas de región, muestra una clara asimetría a la derecha y establece la sospecha de no normalidad de las observaciones. La gráfica de probabilidad normal permite comparar visualmente la distribución acumulada de los residuales contra la distribución normal. Adicionalmente el análisis se puede apoyar en un histograma de los residuales. A continuación se presenta la salida de computadora del programa estadístico MINITAB que muestra ambas gráficas.



3.4. Prueba gráfica de normalidad de los residuales del estudio en candelilla.

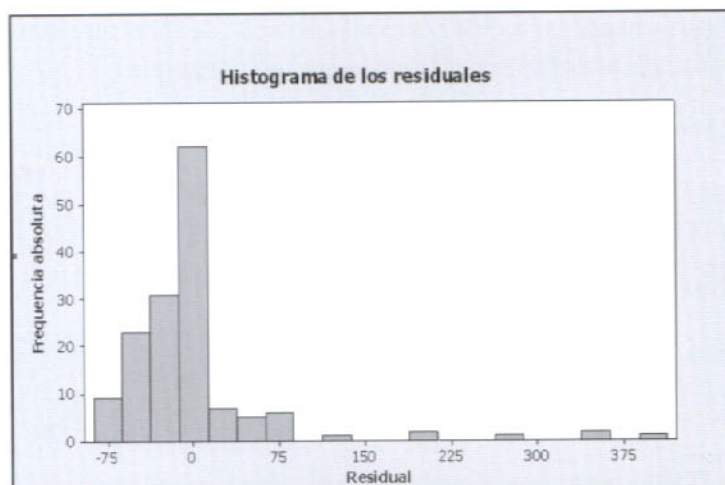


Figura 3.5. Histograma de los residuales del estudio de candelilla

Interpretación: Si los cuantiles de los residuales son aproximadamente iguales a los de la distribución normal, para la misma frecuencia acumulada, entonces la gráfica de los residuales se apegará a la línea recta que representa los cuantiles de la normal. En la gráfica de los residuales que nos ocupa, se observa con claridad que los residuales no se apegan a una normal, siendo su asimetría a la derecha como se puede constatar en el histograma correspondiente.

3.4.2.2 Pruebas estadísticas de normalidad

La prueba estadística de normalidad más popular es la de Shapiro – Wilk. La hipótesis nula es que la distribución de probabilidad de la variable que se analiza es normal. El problema es que estas pruebas son sensibles a pequeñas desviaciones de la normal. Dado que en la mayoría de las aplicaciones científicas en agronomía no satisface estrictamente el supuesto de normalidad, es probable que tales pruebas den como resultado el rechazo de la hipótesis nula y, por tal razón, tienen una utilidad práctica limitada.

Ejemplo 3.9. Con los datos del ejemplo 3.6, a continuación se presenta un programa en SAS que realiza varias pruebas de normalidad a los residuales.

```
DATA PNORMALIDAD;
INPUT RESIDUAL @@;
CARDS;
```

```
-31.52 -10.52 196.48 11.48 -13.52 -21.52 -33.52 39.48 -22.52 -33.52 -16.52 -12.52 -33.52
-24.52 47.48 69.48 -6.52 11.48 31.48 -0.52 -22.52 -26.52 -33.52 -30.52 -33.52 -
```

60.32 -13.32 -68.32 -44.32 -63.32 -62.32 -66.32 72.68 -52.32 -65.32 -56.32 -62.32 347.68
 -68.32 -68.32 134.68 54.68 -64.32 75.68 -58.32 -13.32 -67.32 -68.32 -54.32 391.68
 -48.48 -45.48 195.52 1.52 -50.48 -46.48 -50.48 354.52 -46.48 -49.48 -45.48 -46.48 -50.48
 -44.48 54.52 262.52 -26.48 -36.48 -32.48 -50.48 -14.48 -46.48 -49.48 -37.48 -50.48 -9.04
 0.96 71.96 11.96 18.96 -9.04 -8.04 -9.04 -7.04 -4.04 -7.04 -9.04 -9.04 -7.04 2.96 -1.04 -
 7.04 -6.04 20.96 2.96 -8.04 -5.04 -7.04 -9.04 -9.04 -9.96 -0.96 83.04 -4.96 16.04 -8.96 -
 9.96 -9.96 -7.96 -7.96 -7.96 -8.96 -9.96 -6.96 -8.96 -5.96
 20.04 -6.96 9.04 3.04 -7.96 19.04 -8.96 -7.96 -8.96 -12.56 9.44 81.44 3.44 30.44 -8.56 -
 12.56 -8.56 -12.56 -12.56 -9.56 -12.56 -12.56 -12.56 -6.56 6.44 -9.56 -8.56 50.44 9.44 -
 7.56 -8.56 -12.56 -10.56 -12.56;

PROC UNIVARIATE NORMAL;

VAR RESIDUAL;

RUN;

SALIDA DE RESULTADOS:

Procedimiento UNIVARIATE

Variable: RESIDUAL

Momentos

N	150	Pesos de la suma	150
Media	0	Observaciones de la suma	0
Desviación típica	70.2900988	Varianza	4940.69799
Asimetría	3.51154554	Curtosis	14.849047
Suma de cuadrados no corregidos	736164	Suma de cuadrados corregidos	736164
Coefficiente de variación	.	Media de error estándar	5.73916253

Medidas estadísticas básicas

Localización		Variabilidad	
Media	0.0000	Desviación típica	70.29010
Mediana	-9.0400	Varianza	4941
Moda	-12.5600	Rango	460.00000
		Rango intercuantil	34.48000

Tests para posición: $\mu_0=0$

Test	-Estadístico-		---- P-valor ----	
T de Student	t	0	Pr > t	1.0000
Signo	M	-37	Pr >= M	<.0001
Puntuación con signo	S	-2259.5	Pr >= S	<.0001

Tests para normalidad				
Test	-Estadístico-		---- P-valor ----	
Shapiro-Wilk	#11 X	0.615128	Pr < W	<0.0001
Kolmogorov-Smirnov	D	0.26715	Pr > D	<0.0100
Cramer-von Mises	W-Sq	3.027308	Pr > W-Sq	<0.0050
Anderson-Darling	A-Sq	16.18974	Pr > A-Sq	<0.0050

Las pruebas estadísticas de normalidad se realizan con el programa SAS invocando el comando UNIVARIATE con la opción NORMAL.

Interpretación. Las cuatro pruebas estadísticas encabezadas por la de Shapiro-Wilk tienen niveles observados de significancia $P < 0.01$ y por lo tanto rechazan la hipótesis de normalidad. Nótese que los valores de localización: media, mediana y moda guardan la relación de orden: moda < mediana < media, hecho que indica asimetría a la derecha.

3.4.3. Transformaciones que estabilizan la varianza

Es frecuente que el incumplimiento del supuesto de normalidad se deba a que la variable que se analiza sea de naturaleza Binomial, Binomial negativa o Poisson. En estos modelos, la media tiene una relación bien definida con la varianza, por lo tanto es de esperar que se presente esta aparente inestabilidad de la varianza. Como ejemplo de datos con estas características se pueden citar:

- Observaciones sobre muestras de plantas en cultivos.
- Conteo de insectos en plantas.
- Conteo de colonias de bacterias en recipientes de laboratorio.
- Número de larvas sobrevivientes en estudios de insectos.
- Número de plantas que florecen en una sección.
- Datos de supervivencia.
- Número de animales infectados con el mismo organismo.

Las varianzas de datos que provienen de un modelo Poisson, se pueden estabilizar con

la transformación *raíz cuadrada*. Si la media es pequeña, por ejemplo $\mu_y < 3$, entonces

se recomienda la transformación $x = \sqrt{y + \frac{3}{8}}$.

Si los datos son de naturaleza binomial, se recomienda la transformación $x = \text{sen}^{-1} \sqrt{\frac{y}{n}}$.

Si $n < 50$ se recomienda sustituir $\frac{y}{n}$ por $\frac{\left(y + \frac{3}{8}\right)}{\left(n + \frac{3}{4}\right)}$. Si todas las proporciones observadas

en el experimento están en el intervalo cerrado $[0.3, 0.7]$, la varianza Binomial tiene una estabilidad relativa y tal vez no se requiera una transformación.

Si los datos provienen de una distribución de contagio, como es el caso de observar número de animales infectados con un mismo organismo, la varianza aumenta con la media a una tasa superior que en la distribución Poisson. La transformación sugerida para estabilizar la varianza se basa en el seno hiperbólico inverso: $x = \lambda^{-1} \text{senh}^{-1} \sqrt{y}$.

Esta transformación requiere una estimación previa de λ . Recuérdese que en la distribución Binomial Negativa con media μ_y , la varianza es $\sigma_y^2 = \mu_y + \lambda^2 \mu_y^2$.

Ejemplo 3.10. Continuando con el análisis de los datos del ejemplo 3.6, la transformación está en función de la naturaleza de la variable. Los datos de conteos de plantas con distribución espacial que obedece a la disponibilidad de nutrientes en el suelo, siguen aproximadamente una distribución de contagio, por lo tanto se utilizará la transformación:

$$x = \lambda^{-1} \text{senh}^{-1} \sqrt{y}$$

Tabla 3.9. Resumen estadístico para estimar λ en el estudio sobre candelilla

Región	N	$\hat{\mu}_i$	$\hat{\sigma}_i$	$\hat{\lambda}_i$
1	25	33.5200000	49.828974	1.48
2	25	68.3200000	124.571506	1.82
3	25	50.4800000	107.092297	2.12
4	25	9.0400000	17.280721	1.88
5	25	9.9600000	19.664859	1.95
6	25	12.5600000	22.768912	1.79

Con la última columna de la Tabla 3.9 se calcula

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^6 \hat{\lambda}_i}{6} = 1.84$$

Ahora, recordando que el seno hiperbólico inverso de una variable, digamos w , se puede escribir en términos de la función logaritmo natural como:

$$\text{Senh}^{-1}w = \ln(w + \sqrt{w^2 + 1}); \quad \forall w \in \mathfrak{R}$$

Se aplicó la transformación $x = \hat{\lambda}^{-1} \text{senh}^{-1} \sqrt{y}$; donde: $\hat{\lambda} = 1.84$ y \sqrt{y} es la raíz cuadrada de las observaciones. Se realizó el análisis estadístico de la variable transformada mediante el programa SAS. El programa y el análisis que resulta se muestran a continuación.

DATA HOVTEST2;

INPUT REGION CONTEO @@;

TRANS=(1/1.84)*LOG(SQRT(CONTEO)+SQRT(CONTEO+1));

CARDS;

1 2 1 23 1 230 1 45 1 20 1 12 1 0 1 73 1 11 1 0 1 17 1 21 1 0 1 9 1 81 1 103 1 27

1 45 1 65 1 33 1 11 1 7 1 0 1 3 1 0

2 8 2 55 2 0 2 24 2 5 2 6 2 2 2 14 2 16 2 3 2 12 2 6 2 416 2 0 2 0 2 203 2 123 2 4

2 144 2 10 2 55 2 1 2 0 2 14 2 460

3 2 3 5 3 246 3 52 3 0 3 4 3 0 3 405 3 4 3 1 3 5 3 4 3 0 3 6 3 105 3 313 3 24 3 14 3 18

```

3 0 3 36 3 4 3 1 3 13 3 0
4 0 4 10 4 81 4 21 4 28 4 0 4 1 4 0 4 2 4 5 4 2 4 0 4 0 4 2 4 12 4 8 4 2 4 3 4 30 4
12 4 1 4 4 4 2 4 0 4 0
5 0 5 9 5 93 5 5 5 26 5 1 5 0 5 0 5 2 5 2 5 2 5 1 5 0 5 3 5 1 5 4 5 30 5 3 5 19 5 13 5 2
5 29 5 1 5 2 5 1
6 0 6 22 6 94 6 16 6 43 6 4 6 0 6 4 6 0 6 0 6 3 6 0 6 0 6 0 6 6 6 19 6 3 6 4 6 6 3 6 22

```

```

;
PROC GLM; CLASS REGION; MODEL TRANS = REGION;
MEANS REGION / HOVTEST = LEVENE;
RUN;

```

Procedimiento GLM

Variable dependiente: TRANS

Fuente	DF	Suma de cuadrados	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
Modelo	5	3.90089736	0.78017947	2.55	0.0306
Error	144	44.11426881	0.30634909		
Total correcto	149	48.01516617			

R-cuadrado Coef Var Raiz MSE TRANS Media
0.081243 68.05981 0.553488 0.813238

Fuente	DF	Tipo I SS	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
REGION	5	3.90089736	0.78017947	2.55	0.0306

Procedimiento GLM

Test de Levene para homogeneidad de la varianza TRANS
ANOVA de las desviaciones cuadradas de las medias de grupo

Fuente	DF	Suma de cuadrados	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
REGION	5	0.7325	0.1465	1.34	0.2489
Error	144	15.6886	0.1089		

Procedimiento GLM

Nivel de REGION	----- TRANS -----		
	N	Media	Dev std
1	25	0.99000940	0.57554576
2	25	1.02752142	0.62666192
3	25	0.88623808	0.61655308
4	25	0.63548725	0.48488000
5	25	0.69200229	0.43759152
6	25	0.64816849	0.55444007

En el programa SAS, antes de la instrucción CARDS, se crea la variable TRANS, misma que luego se analiza con PROC GLM y la opción LEVENE de MEANS. El nivel de significancia observado de la prueba de homogeneidad de varianzas para los datos transformados es 0.2489, que indica el no rechazo de la $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_6^2$.

Adicional a lo anterior, enseguida se presentan las gráficas de: residuales versus las medias de región, el histograma de los residuales y la prueba gráfica de normalidad, para los datos transformados.

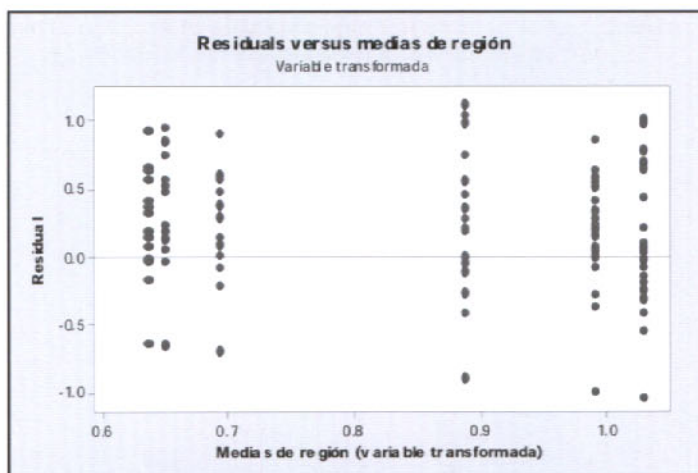


Figura 3.6. Gráfica de los residuales versus las medias estimadas de región para los muestreos de candelilla, después de la transformación seno hiperbólico inverso.

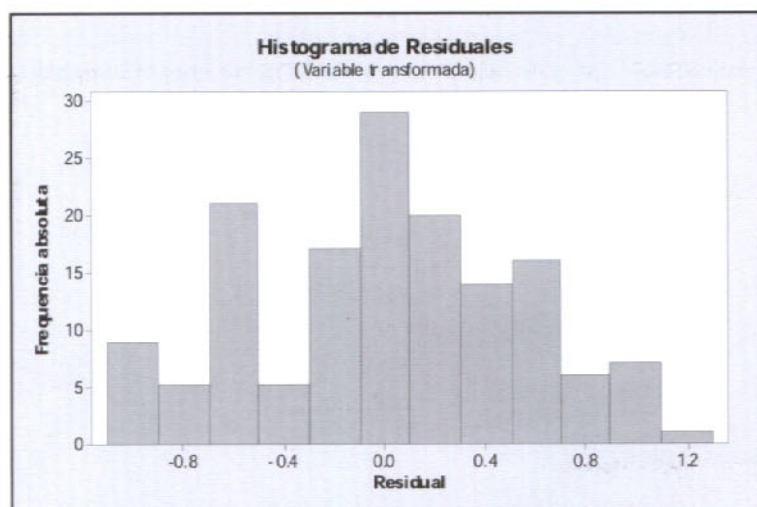


Figura 3.7. Histograma de los residuales para los muestreos de candelilla, después de la transformación seno hiperbólico inverso.

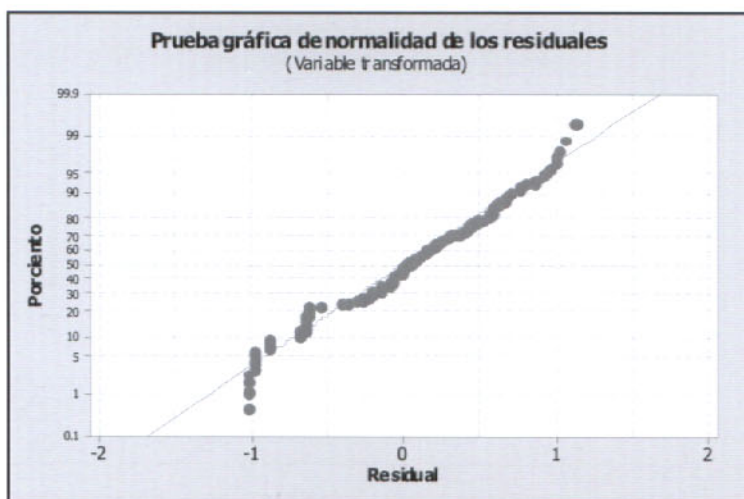


Figura 3.8. Prueba gráfica de normalidad de los residuos para los muestreos de candelilla, luego de la transformación seno hiperbólico inverso.

En la gráfica de residuos se aprecia la estabilización de la varianza de los datos transformados. Sin embargo, nótese que no se logra del todo la normalización de la variable como se puede apreciar en esta última gráfica. La prueba estadística de normalidad que produce SAS para los datos transformados es la siguiente:

Tests para normalidad de los datos transformados.

Test	-Estadístico -	P-valor
Shapiro-Wilk	#11 X 0.971807	Pr < W 0.0035
Kolmogorov-Smirnov	D 0.105247	Pr > D <0.0100
Cramer-von Mises	W-Sq 0.15572	Pr > W-Sq 0.0209
Anderson-Darling	A-Sq 1.116236	Pr > A-Sq 0.0065

Comentarios finales:

1. El método usado para transformar los datos mediante el seno hiperbólico inverso y la estimación de λ solo es posible en el diseño totalmente aleatorizado, en el que es posible estimar las medias y varianzas de los grupos.

2. Las pruebas de homogeneidad de varianzas implementadas en los programas de análisis estadístico solo están disponibles para el diseño completamente al azar.
3. El análisis de varianza es robusto al incumplimiento del supuesto de normalidad, pero no lo es al incumplimiento de homogeneidad de varianzas.

REFERENCIAS

- Bhattacharyya, G. K., y Johnson, R. A., 1976. *Statistical Concepts and Methods*, J. Wiley & Sons. USA. 639 p.
- Box, G. E. P., Hunter, W. G. y Hunter, J. S. 1993. *Estadística Para Investigadores*, ED. Reverté – Wiley. España. 667 p.
- Kuehl, R. O., 2001. *Diseño de Experimentos (Principios estadísticos de diseño y análisis de investigación)*. 2ª ed. Thomson – Learning. México. 667 p.
- Littell, R. C., Freund, R. J. y Spector, P. C. 1991. *SAS System for Linear Models*, 3ª ed. USA. 329 p.

CAPÍTULO 4

DISEÑOS QUE USAN BLOQUES

El tema de este capítulo es el uso de factores que no son de interés, pero, pueden ocasionar cambios en la variable respuesta. Al introducir estos factores en el modelo se reduce la variabilidad de los errores, se aumenta el rango de validez de las inferencias y se puede tener una mejor descripción de la realidad que se desea estudiar. Si se usan factores cualitativos las categorías de estos factores se denominan bloques.

Se presentan solo los diseños más usados en la investigación agropecuaria que usan bloques: el diseño de bloques al azar, bloques al azar generalizado y cuadro latino.

4.1. Concepto de bloque

Un bloque es un conjunto de unidades experimentales homogéneas que atiende ciertas características o posibles factores de confusión. Un factor de confusión es cualquier factor que afecta a la variable respuesta y que varía entre las unidades experimentales aumentando la varianza del error experimental y disminuyendo la precisión de los resultados del experimento. Factores tales como la edad o el peso de los animales son ejemplos de factores que pueden aumentar la variación entre las observaciones de las variables respuesta. De manera que la función de los bloques es la de controlar los factores de confusión.

Los factores de confusión se clasifican atendiendo a su origen en:

- Inherentes al material experimental (bloques lo más homogéneos posible).
- Los que surgen durante la conducción del experimento (manejo lo más homogéneo posible por bloque).

El uso de bloques estratifica las unidades experimentales en grupos homogéneos y contribuyen a que se cumplan los supuestos de normalidad y homogeneidad de varianzas.

4.2. Diseño en bloques aleatorizados completos

Este diseño ya fue discutido en el capítulo de comparación de dos poblaciones usando muestras apareadas. En esta ocasión se expone la técnica más general que conduce al análisis de varianza. Se inicia con el procedimiento de aleatorización en este diseño.

4.2.1. Aleatorización del diseño

La asignación aleatoria de tratamientos a las unidades experimentales en este diseño está restringida de manera que cada tratamiento debe presentarse el mismo número de veces (una o más) dentro de cada bloque. La aleatorización se ilustra con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1. Las recomendaciones actuales para fertilizar el trigo con nitrógeno incluyen la aplicación de cantidades específicas en etapas establecidas del crecimiento de la planta. Las recomendaciones se desarrollaron a través de un análisis periódico del contenido de nitratos en los tejidos de la espiga. Se pensó que el análisis del tejido era un medio efectivo para supervisar la cantidad de nitrógeno en la cosecha y tener una base para predecir el nitrógeno necesario para una producción óptima.

En ciertas situaciones, los contenidos de nitratos en los tejidos de la espiga predecían una mayor cantidad de nitrógeno; en consecuencia, el investigador quiere evaluar el efecto de varios programas de fertilización sobre esas cantidades de nitrógeno y sobre la producción de trigo, con el fin de mejorar las recomendaciones del procedimiento. Para la comparación se incluyó la recomendación normal vigente (tratamiento 4).

Se incluyeron seis programas de aplicación de nitrógeno que podrían proporcionar el intervalo de condiciones necesario para evaluar el proceso. El experimento se llevó a cabo en un campo irrigado con un gradiente de humedad en dirección del área de parcelas experimentales. Como la respuesta de las plantas dependen de la variabilidad en la humedad disponible, las parcelas se agruparon en bloques de seis unidades experimentales de manera que cada bloque tuviera condiciones lo más homogéneas posibles en cuanto a este factor. El diseño del experimento resultante fue un diseño de bloques completos aleatorizado, con cuatro bloques de seis parcelas a las que se asignaron al azar los tratamientos de nitrógeno.

Los seis programas de fertilización nitrogenada se denotaron con las letras: A, B, C, D, E y F y se les asignaron los números enteros 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

El procedimiento de aleatorización consiste en identificar con un número del 1 al 6 a cada una de las parcelas del primer bloque. Enseguida, se localiza una permutación aleatoria de 6 números. El programa en SAS que realiza esta operación es:

```
DATA ALEATORI;  
DO I = 1 TO 6;  
W=RANUNI(123);  
OUTPUT; END;
```

```
PROC RANK DATA=ALEATORI; VAR W;
RANKS RW;
PROC PRINT; VAR W RW;
RUN;
```

Este programa se inicia con un DO para ejecutar 6 veces la instrucción:

```
W=RANUNI(123);
```

La función RANUNI (123) obtiene un número aleatorio de una distribución uniforme continua definida en los reales (0, 1). La función INT elimina la parte decimal del número aleatorio inicial al que se le multiplica previamente por 100 y se le agrega la unidad. Al ejecutarse 6 veces se genera la secuencia de números W. El procedimiento RANK asigna a cada número de la secuencia W su número de orden de menor a mayor; esta operación da como resultado la variable RW, misma que constituye una permutación de las $P_6^6 = 720$ que son posibles.

Obs	W	RW
1	0.75040	5
2	0.32091	3
3	0.17839	1
4	0.90603	6
5	0.35712	4
6	0.22111	2

Se asigna el tratamiento E a la parcela 1, el C a la parcela 2, el A a la 3 y así sucesivamente. El esquema de la asignación aleatoria para el primer bloque se presenta en la Figura 4.1

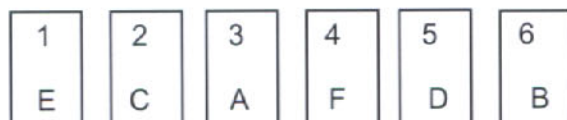


Figura 4.1. Asignación aleatoria de tratamientos a las unidades experimentales en un bloque completo.

Este procedimiento se repite para cada bloque. De ninguna manera se usa la asignación de un bloque para el siguiente. En particular si se usa el programa en SAS que se proporciona arriba, es necesario proporcionar una "semilla" inicial diferente para la asignación aleatoria de cada bloque (en el programa presente la semilla inicial es 123). Si no se cuenta con este programa de análisis estadístico se puede usar cualquier programa que genere números aleatorios de una distribución uniforme. Incluso una calculadora de bolsillo que cuente con la función RANDOM y las tablas de números aleatorios que se proporcionan en el Anexo son útiles.

Dadas las permutaciones aleatorias adicionales:

6	1	4
4	4	3
5	6	5
1	5	6
3	3	1
2	2	2

La asignación final de tratamientos a las parcelas dentro de cada bloque se muestra en la Figura 4.2.

						Gradiente de Irrigación ↓
Bloque 1	1 E	2 C	3 A	4 F	5 D	6 B
Bloque 2	1 F	2 D	3 E	4 A	5 C	6 B
Bloque 3	1 A	2 D	3 F	4 E	5 C	6 B
Bloque 4	1 D	2 C	3 E	4 F	5 A	6 B

Figura 4.2. Asignación aleatoria de tratamientos en un diseño de bloques completos al azar.

4.2.2. Modelo estadístico y tabla del análisis de varianza

El modelo lineal para un experimento en un diseño en bloque aleatorizados completos

$$es: Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}; \quad j = 1, \dots, b, \quad i = 1, \dots, t \quad (4.1)$$

Donde:

Y_{ij} : Respuesta en el j-ésimo bloque del tratamiento i-ésimo.

μ : Media general, común a todas las unidades antes de aplicar los tratamientos.

τ_i : Efecto del i-ésimo tratamiento.

β_j : Efecto del j-ésimo bloque.

ε_{ij} : Error en el j-ésimo bloque del tratamiento i-ésimo.

Las suposiciones distribucionales se resumen a través de la variable ε_{ij} escribiendo:

$$\varepsilon_{ij} \sim NI(0, \sigma^2)$$

Se asume que no existe interacción significativa entre tratamientos y bloques. La independencia de los ε_{ij} se justifica a través de la asignación aleatoria de los tratamientos a las unidades experimentales.

Estructura de los datos para un diseño de bloques completos aleatorizados.

Tabla 4.1 Estructura de datos para un diseño de bloques completos aleatorizados

Tratamiento	Bloques					Medias de tratamiento
1	1	2	b		
2	Y_{11}	Y_{12}	Y_{1b}	$\bar{Y}_{1.}$	
.	Y_{21}	Y_{22}	Y_{2b}	$\bar{Y}_{2.}$	
.	
.	
t	Y_{t1}	Y_{t2}	Y_{tb}	$\bar{Y}_{t.}$	
Medias de bloque	$\bar{Y}_{.1}$	$\bar{Y}_{.2}$	$\bar{Y}_{.b}$	$\bar{Y}_{..}$	

Análisis de varianza

La desviación de cualquier observación con respecto a la gran media se puede escribir con la siguiente identidad algebraica.

$$Y_{ij} - \bar{Y}_{..} = (Y_{i.} - \bar{Y}_{..}) + (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}) + (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{..}) \quad (4.2)$$

Los términos del lado derecho de la ecuación (4.2) son:

Desviación debida al tratamiento $(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})$

Desviación debida al bloque $(\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})$

Desviación debida al error $(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{..})$

Desviación total $Y_{ij} - \bar{Y}_{..}$

Al observar con cuidado los dos últimos términos de la ecuación (4.2) se puede deducir que forman una identidad algebraica para la desviación de las observaciones de la media de tratamientos.

$$Y_{ij} - \bar{Y}_{i.} = (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}) + (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{..}) \quad (4.3)$$

Se hace una partición de la desviación debida al error del diseño completamente

aleatorizado $Y_{ij} - \bar{Y}_i$ en dos componentes; el primer término se identifica con el factor bloque como $(\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})$, mientras que el segundo término se denomina error aleatorio $(Y_{ij} - \bar{Y}_i - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{..})$.

Elevando al cuadrado y sumando ambos lados de la ecuación (4.2) se tiene:

$$\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^b (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = b \sum_{i=1}^t (\bar{Y}_i - \bar{Y}_{..})^2 + t \sum_{j=1}^b (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^b (Y_{ij} - \bar{Y}_i - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{..})^2$$

S. C. total = S.C. tratamientos + S. C. bloques + S. C. error

Asociadas con estas S. C. tenemos distribuciones ji-cuadradas que dan origen a una prueba de F para probar el juego de hipótesis:

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_t \text{ vs. } H_1 : \tau_i \neq \tau_j \text{ para al menos una } i \neq j$$

Tabla 4.2 Análisis de varianza para el modelo $Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrados Medios	F_0	Esperanza del cuadrado Medio
Trat	$t - 1$	$b \sum_{i=1}^t (\bar{Y}_i - \bar{Y}_{..})^2$	$\frac{S.C.Trat}{t - 1}$	$\frac{C.M.Trat.}{C.M.Error}$	$\sigma^2 + \frac{b \sum (\tau_i - \bar{\tau})^2}{t - 1}$
Bloques $b - 1$	$t \sum (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2$	$\frac{S.C.Bloq}{b - 1}$			
Error	$(b - 1)(t - 1)$	S.C.Error	$\frac{S.C.Error}{(b - 1)(t - 1)}$		σ^2
Total	$tb - 1$	$\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^b (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2$			

Para probar: $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_t$ vs $H_1 : \tau_i \neq \tau_j$ para al menos una $i \neq j$

Rechazar H_0 con un nivel de significancia α si, $F_0 \geq F_{(t-1)(t-1)(b-1)}(\alpha)$

Ejemplo 4.2 Supóngase que las observaciones de nitrógeno en espigas del ejemplo 4.1 son las de la Tabla 4.3.

Tabla 4.3 Nitrógeno observado en espigas de trigo ($\text{ppm} \times 10^{-2}$) en seis tratamientos programados de nitrógeno en un diseño de seis bloques completos aleatorizados.

Tratamiento	Bloques				Medias de tratamiento
1	34.98	41.22	36.94	39.97	38.28
2	40.89	46.69	46.65	41.90	44.03
3	42.07	49.42	52.68	42.91	46.77
4	37.18	45.85	40.23	39.20	40.62
5	37.99	41.99	37.61	40.45	39.51
6	34.89	50.15	44.57	43.29	43.23
Medias de bloque	38.00	45.89	43.11	41.29	$\bar{Y}_{..} = 42.07$

El análisis de varianza que se presenta fue realizado utilizando el programa MINITAB. Este programa proporciona un conjunto de gráficas que permiten hacer un análisis del cumplimiento de los supuestos del análisis de varianza. En particular fueron solicitadas las siguientes gráficas: gráfica de probabilidad normal de los residuales, gráfica de valores ajustados contra residuales y promedios de la variable respuesta contra (bloque, tratamiento).

Two-way ANOVA: resp versus bloque, tratamiento

Source	DF	SS	MS	F	P
Bloque	3	197.004	65.6680	9.12	0.001
Tratamiento	5	201.316	40.2633	5.59	0.004
Error	15	108.008	7.2006		
Total	23	506.329			

S = 2.683 R-Sq = 78.67% R-Sq(adj) = 67.29%

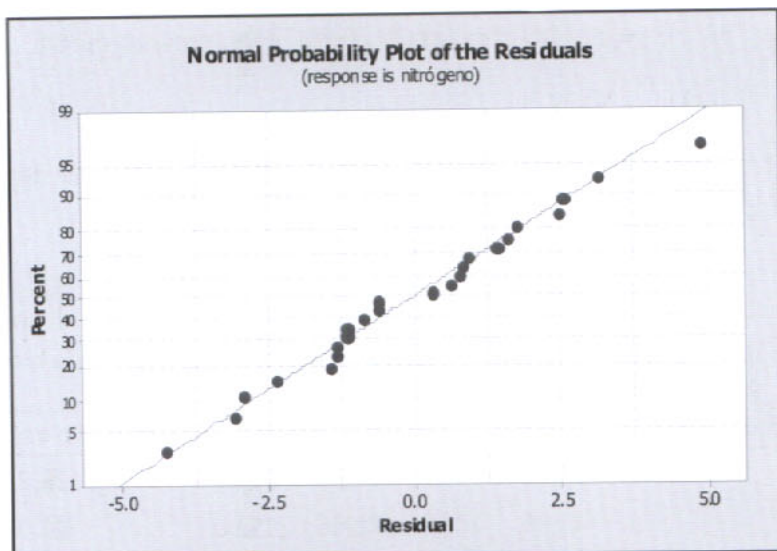


Figura 4.3 Gráfica de probabilidad normal de los residuales del análisis de varianza para los datos de nitrógeno del ejemplo 4.2.

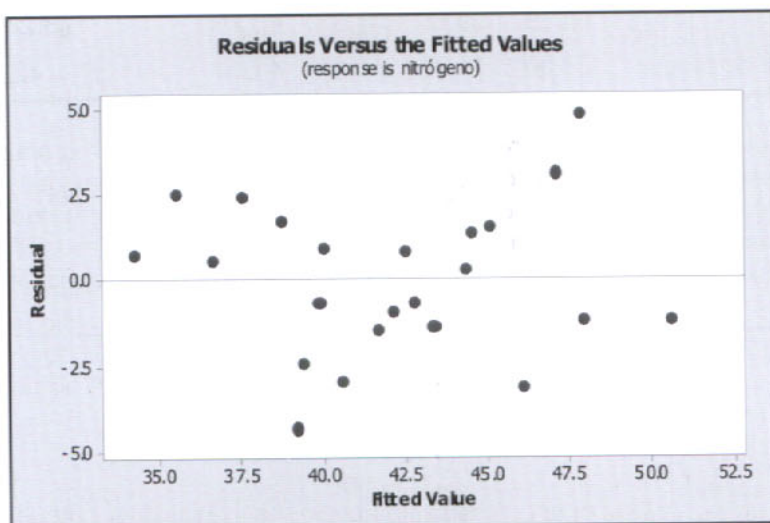


Figura 4.4 Gráfica de residuales del análisis de varianza para los datos de nitrógeno del ejemplo 4.2.

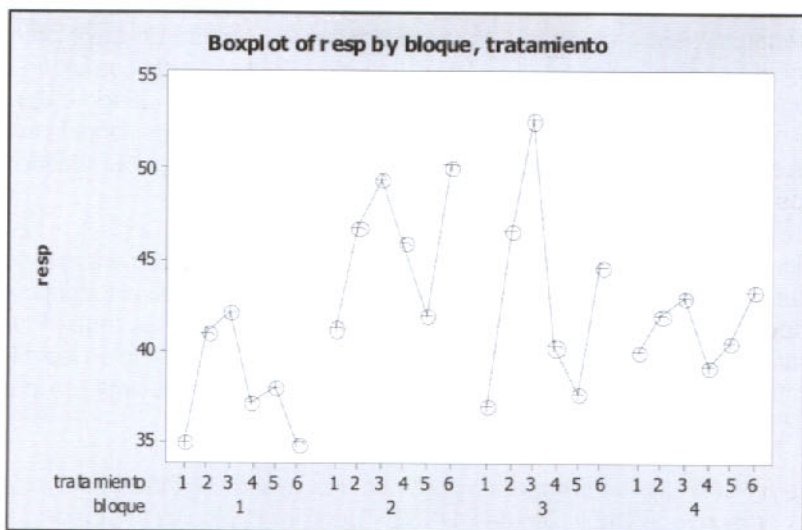


Figura 4.5 Gráfica de medias de nitrógeno contra bloques, tratamiento para los datos de nitrógeno del ejemplo 4.2.

Interpretación: El nivel observado de significancia para tratamientos es $P = 0.004$, por lo que en esta etapa del desarrollo de la planta, hay diferencias significativas entre los tratamientos en su efecto de concentración de nitrógeno en las espigas.

No es válida la prueba de igualdad de bloques ya que no existen dos unidades experimentales que pertenezcan al mismo bloque y al mismo tratamiento, es decir, no existen repeticiones verdaderas de bloques; por lo tanto no debe tomarse en cuenta el nivel observado de significancia que aparece en la mayoría de las tablas de análisis de varianza de los programas estadísticos.

La Figura 4.3 de probabilidad normal de los residuales no es la de una variable con distribución alejada de la normal. El diagrama de dispersión de los residuales para los valores ajustados (Figura 4.4) no hace suponer una condición de heterogeneidad de las varianzas. Por lo tanto, se asume la validez del análisis y solo falta analizar el supuesto de no interacción entre bloques y tratamientos.

La Figura 4.5 de la interacción entre los bloques y tratamientos tampoco indica alguna situación que permita suponer que esta interacción sea significativa, nótese que, exceptuando el primer bloque, el patrón de respuesta a tratamientos es aproximadamente similar. En este punto es necesario hacer el siguiente comentario: en un diseño de bloques completos al azar no existen repeticiones verdaderas ya que las reproducciones de

los tratamientos se hacen en bloques con condiciones distintas. Es por eso que se utiliza la interacción entre bloques y tratamientos como término de error con el fin de hacer las inferencias relacionadas con tratamientos. El factor de confusión no debe interactuar con el efecto de tratamientos, se puede minimizar este riesgo utilizando bloques no muy grandes. La única manera de poder realizar inferencias sobre la interacción entre bloques y tratamientos es mediante el diseño de bloques generalizados que se discuten más adelante.

Interpretación de las comparaciones múltiples. El tratamiento cuatro era la recomendación estándar de fertilizante para trigo; la concentración de nitrógeno en la espiga de trigo medida en toda la temporada de crecimiento se usa para evaluar los requerimientos de nitrógeno para optimizar las cosechas. El investigador está interesado en las diferencias de tratamiento y la recomendación actual durante cada etapa de crecimiento, para lo que es adecuado usar el método de Dunnett.

El programa en SAS que se presenta a continuación realiza el análisis de varianza y la prueba de comparaciones múltiples de DUNNETT con intervalos simultáneos de confianza al 95 por ciento y considerando como tratamiento control el tratamiento cuatro.

```
DATA NITRATOS;
INPUT TRAT BLOQUE NITRATOS @@;
CARDS;
1 1 34.98 2 1 40.89 3 1 42.07 4 1 37.18 5 1 37.99 6 1 34.89
1 2 41.22 2 2 46.69 3 2 49.42 4 2 45.85 5 2 41.99 6 2 50.15
1 3 36.94 2 3 46.65 3 3 52.68 4 3 40.23 5 3 37.61 6 3 44.57
1 4 39.97 2 4 41.90 3 4 42.91 4 4 39.20 5 4 40.45 6 4 43.29
;
PROC GLM; CLASS TRAT BLOQUE;
MODEL NITRATOS = TRAT BLOQUE;
MEANS TRAT / DUNNETT('4')ALPHA=0.95;
RUN;
```


Procedimiento GLM					
Variable dependiente: NITRATOS					
Fuente	DF	Suma de cuadrados	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
Modelo	8	398.3203167	49.7900396	6.91	0.0007
Error	15	108.0084167	7.2005611		
Total correcto	23	506.3287333			
	R-cuadrado	Coef Var	Raiz MSE	NITRATOS Media	
	0.786683	6.378 131	2.683386	42.07167	
Fuente	DF	Tipo I SS	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
TRAT	5	201.3163833	40.2632767	5.59	0.0042
BLOQUE	3	197.0039333	65.6679778	9.12	0.0011

Procedimiento GLM

Tests t de **Dunnnett** para NITRATOS

NOTA: Este test controla el error experimentwise de tipo I para las comparaciones de tratamientos con un control.

Alfa 0.95
 Error de grados de libertad 15
 Error de cuadrado medio 7.200561
 Valor crítico de t de Dunnnett 0.63508
 Diferencia significativa mínima 1.205

Las comparaciones importantes del nivel 0.95 están indicadas por ***.

TRAT Comparación	Diferencia entre medias	Simultáneo 5% Límites de confianza		
3 - 4	6.155	4.950	7.360	***
2 - 4	3.418	2.212	4.623	***
6 - 4	2.610	1.405	3.815	***
5 - 4	-1.105	-2.310	0.100	
1 - 4	-2.337	-3.543	-1.132	***

La prueba de Dunnett al 95 por ciento indica que el único tratamiento (programa de fertilización con nitrógeno) que no difiere con respecto al control en lo que se refiere al nivel de nitratos encontrado en la espiga es el 5, ya que la diferencia incluye al cero. El tratamiento 3 es el que marca una diferencia mayor con respecto al control. La diferencia entre medias es de 6.155 a favor del tratamiento 3.

4.3. Bloques al azar generalizado

Para probar la existencia de interacción de bloques con el efecto de tratamientos, el experimento debe tener más de una unidad experimental por cada tratamiento dentro de cada bloque. Además debe ser balanceado, es decir debe tener el mismo número de repeticiones en todos los tratamientos y en todos los bloques.

El modelo lineal es:

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{k(ij)}; \quad j = 1, \dots, b, \quad i = 1, \dots, t, \quad k = 1, \dots, r$$

Donde:

Y_{ijk} : Respuesta en la k-ésima repetición en el j-ésimo bloque del tratamiento i-ésimo .

μ : Media general, común a todas las unidades antes de aplicar los tratamientos.

τ_i : Efecto del i-ésimo tratamiento.

β_j : Efecto del j-ésimo bloque.

$(\tau\beta)_{ij}$ Efecto de la interacción entre el j-ésimo bloque y el i-ésimo tratamiento.

$\varepsilon_{k(ij)}$ Error en la k-ésima repetición anidada en el j-ésimo bloque e i-ésimo tratamiento.

Las suposiciones distribucionales se resumen a través de la variable $\varepsilon_{k(ij)}$ escribiendo:

$$\varepsilon_{k(ij)} \sim NI(0, \sigma^2)$$

Los cálculos de las particiones de sumas de cuadrados y la prueba de interacción son similares a los de un arreglo factorial con dos factores que se presenta en el Capítulo 6 de factoriales.

Nótese que este diseño se puede usar preliminarmente para estudiar la posible interacción entre bloques y tratamientos. Si no existe interacción entonces en el futuro ya no es necesario programar bloques al azar generalizado.

4.4. Diseño de cuadro latino

Este tipo de diseño utiliza simultáneamente dos criterios de bloqueo. Se deriva de las letras del alfabeto latino A, B, C, ... dispuestas en un arreglo cuadrado de manera que cada letra aparece una vez en cada columna y una vez en cada renglón del cuadrado. En sus aplicaciones a experimentos, los renglones y las columnas del arreglo se identifican con los dos criterios de bloqueo y las letras latinas con los tratamientos.

Ejemplo 4.3 Un investigador deseaba determinar densidad de siembra óptima para una nueva variedad de trigo, con alto contenido de extracto de semolina, importante para la elaboración de pastas. Él ensayó cinco densidades de siembra (40, 90, 140, 190 y 240 Kg/ha) para el diseño de tratamientos. Con base en otros cultivos comunes a la región, estas densidades de siembra deben incluir a la densidad de siembra óptima.

El experimento se llevó a cabo en un campo experimental con riego por gravedad con un gradiente de humedad en una dirección del área experimental. Además, se sabía que ese campo experimental tiene diferencias en el suelo creadas por la pendiente requerida para la irrigación.

El investigador asignó de manera aleatoria las densidades de siembra a unidades experimentales en un arreglo de cuadro latino 5 X 5.

4.4.1. Aleatorización del diseño en cuadro latino

Paso 1. La aleatorización parte de un cuadro latino estándar. Un cuadro estándar tiene los símbolos de tratamiento (A, B, C, ...) en orden alfabético en el primer renglón y en la primera columna del arreglo. Cada símbolo de tratamiento ocurre una vez en cada columna y una vez en cada renglón del arreglo. Solo existe un cuadro estándar para $t = 2$ o $t = 3$; existen 4 cuadros estándar para $t = 4$ tratamientos y 56 para $t = 5$; el número de cuadros estándar aumenta en forma drástica con el número de tratamientos, ya que existen 9408 cuadros estándar con 6 tratamientos.

El cuadro estándar de cualquier tamaño se puede generar escribiendo el primer renglón de letras en orden alfabético. El segundo renglón se obtiene a partir del primero si se corre una letra a la izquierda y se mueve la letra A al extremo derecho. El tercer renglón se obtiene al correr el segundo una letra a la izquierda y colocando la B en la posición de la extrema derecha. Este procedimiento continúa para los renglones restantes. Un cuadro latino estándar de 5 X 5 como lo requiere el experimento del ejemplo que nos ocupa es:

Columna		1	2	3	4	5	(4.4)
	1	A	B	C	D	E	
Renglon original	2	B	C	D	E	A	
	3	C	D	E	A	B	
	4	D	E	A	B	C	
	5	E	A	B	C	D	

Paso 2. Se ordenan al azar todos los renglones (si se cuenta con un cuadro estándar seleccionado al azar, de los posibles, entonces en este paso se ordenan al azar todos los renglones menos el primero).

En este ejemplo se obtiene una permutación aleatoria de los números enteros del 1 al 5. Se puede utilizar un programa de computadora como el presentado en el apartado 4.2.1. Suponga que la permutación aleatoria es: 4, 3, 1, 2, 5. Entonces el cuadro (4.4) adquiere el siguiente orden:

Columna		1	2	3	4	5	(4.5)
	4	D	E	A	B	C	
Renglón original	3	C	D	E	A	B	
	1	A	B	C	D	E	
	2	B	C	D	E	A	
	5	E	A	B	C	D	

Paso 3. Se ordenan al azar todas las columnas. Se obtiene una permutación aleatoria de los enteros del 1 al 5. Suponga que ésta es: 2, 4, 3, 5, 1. Ahora el cuadro (4.5) adquiere el siguiente orden:

Columna original	2	4	3	5	1	(4.6)
	E	B	A	C	D	
	E	B	A	C	D	
	D	A	E	B	C	
	B	D	C	E	A	
	C	E	D	A	B	
	A	C	B	D	E	

Paso 4. Se obtiene una permutación aleatoria para asignar tratamientos a las letras. Esta asignación es innecesaria si el cuadro latino se seleccionó al azar entre todos los cuadros posibles. Para ilustrar el método de asignación, supóngase que las etiquetas de los cinco tratamientos de nuestro ejemplo son: V, W, X, Y, Z. Entonces se obtiene una permutación aleatoria, supóngase que ésta es: 2, 4, 5, 3, 1.

Permutación	Tratamiento	Densidad en Kg. / ha
2=B	V	40
4=D	W	90
5=E	X	140
3=C	Y	190
1=A	Z	240

Las etiquetas de tratamiento V, W, X, Y, Z sustituyen a las letras en el orden B, D, E, C, A en el cuadro aleatorizado (4.6). La asignación final de nuestro ejemplo queda:

X	V	Z	Y	W	(4.7)
W	Z	X	V	Y	
V	W	Y	X	Z	
Y	X	W	Z	V	
Z	Y	V	W	X	

4.4.2. Modelo estadístico y análisis para diseños de cuadro latino

El modelo estadístico lineal para un experimento con t tratamientos en un diseño de cuadro latino $t \times t$ es:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ij} \quad i, j, k = 1, 2, \dots, t;$$

Donde:

Y_{jk} Es la observación de la unidad experimental en la j -ésima hilera y la k -ésima columna del diseño.

τ_i Es el efecto del i -ésimo tratamiento.

β_j Es el efecto de la j -ésima hilera.

γ_k Es el efecto de la k -ésima columna.

ε_{jk} Es el error aleatorio de la unidad experimental en la j -ésima hilera y la k -ésima columna.

Las suposiciones distribucionales se resumen a través de la variable ε_{jk} escribiendo:

$$\varepsilon_{jk} \sim NI(0, \sigma^2)$$

Tabla 4.4 Análisis de varianza para experimentos con diseño de cuadro latino.

Fuente de Variación	Grados de libertad	Sumas de cuadrados	Cuadrados medios	F_0
Tratamientos	$t - 1$	$t \sum_{i=1}^t (\bar{Y}_i - \bar{Y}_{..})^2$	CMT	$\frac{CMT}{CME}$
Hileras	$t - 1$	$t \sum_{j=1}^t (\bar{Y}_j - \bar{Y}_{..})^2$	CMH	
Columnas	$t - 1$	$t \sum_{k=1}^t (\bar{Y}_k - \bar{Y}_{..})^2$	CMC	
Error	$(t - 1)(t - 2)$	Por diferencia	CME	
Total	$t^2 - 1$	$\sum_{j=1}^t \sum_{k=1}^t (Y_{jk} - \bar{Y}_{..})^2$		

Ejemplo 4.4 La Tabla 4.5 proporciona el arreglo y las observaciones en toneladas por hectárea para el experimento con trigo en un diseño de cuadro latino.

Tabla 4.5 Producción de grano en ton/ha de una variedad de trigo para cinco densidades de siembra en un diseño de cuadro latino

					Gradiente de irrigación
					↓
Fila en					
El Campo	Columna 1	Columna 2	Columna 3	Columna 4	Columna 5
1	7.43 (X)	6.27 (V)	6.18 (Z)	7.43 (Y)	7.43 (W)
2	7.61 (W)	5.91 (Z)	6.98 (X)	6.27 (V)	6.98 (Y)
3	5.55 (V)	7.61 (W)	6.81 (Y)	7.52 (X)	6.09 (Z)
4	6.90 (Y)	7.43 (X)	6.98 (W)	6.00 (Z)	7.16 (V)
5	5.28 (Z)	6.72 (Y)	7.07 (V)	7.34 (W)	7.43 (X)

Pendiente del suelo →

El siguiente programa en SAS produce el análisis de varianza para las observaciones de producción de grano.

```
DATA CLATINO;
INPUT COL HIL TRAT $ PROD @@;
CARDS;
1 1 X 7.43 2 1 V 6.27 3 1 Z 6.18 4 1 Y 7.43 5 1 W 7.43
1 2 W 7.61 2 2 Z 5.91 3 2 X 6.98 4 2 V 6.27 5 2 Y 6.98
1 3 V 5.55 2 3 W 7.61 3 3 Y 6.81 4 3 X 7.52 5 3 Z 6.09
1 4 Y 6.90 2 4 X 7.43 3 4 W 6.98 4 4 Z 6.00 5 4 V 7.16
1 5 Z 5.28 2 5 Y 6.72 3 5 V 7.07 4 5 W 7.34 5 5 X 7.43
;
PROC ANOVA; CLASS COL HIL TRAT;
MODEL PROD = TRAT HIL COL;
RUN;
```

Procedimiento ANOVA

Variable dependiente: PROD

Fuente	DF	Suma de cuadrados	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
Modelo	12	8.94191200	0.74515933	4.01	0.0116
Error	12	2.23051200	0.18587600		
Total correcto	24	11.17242400			

R-cuadrado	Coef Var	Raiz MSE	PROD Media
0.800356	6.326056	0.431133	6.815200

Fuente	DF	Anova SS	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
TRAT	4	8.14314400	2.03578600	10.95	0.0006
HIL	4	0.20082400	0.05020600	0.27	0.8916
COL	4	0.59794400	0.14948600	0.80	0.5456

Interpretación:

El valor de F para probar tratamientos es $F = 10.95$ que tiene un nivel observado de significancia de 0.0006. Por lo tanto se concluye que al menos uno de los tratamientos es diferente a los demás.

Interpretación de los resultados usando la técnica de regresión polinomial

El programa estadístico **MINITAB** produce el siguiente resultado:

Polynomial Regression Analysis: REN versus TRAT

The regression equation is

$$\text{REN} = 43.48 + 0.2544 \text{ TRAT} - 0.000999 \text{ TRAT}^2$$

$$S = 3.02212 \quad R\text{-Sq} = 72.0\% \quad R\text{-Sq}(\text{adj}) = 69.4\%$$

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	2	515.682	257.841	28.23	0.000
Error	22	200.930	9.133		
Total	24	716.612			

Sequential Analysis of Variance

Source	DF	SS	F	P
Linear	1	79.481	2.87	0.104
Quadratic	1	436.201	47.76	0.000

El modelo lineal ajustado es $\text{REN} = 43.48 + 0.2544(T) - 0.000999(T)^2$.

Con este modelo es posible obtener la densidad de siembra que produce el máximo rendimiento. Derivando la ecuación con respecto a T e igualando a cero se tiene,

$$\frac{\partial \text{REN}}{\partial T} = -2 \times 0.000999T + 0.2544 = 0$$

$$T_{\text{MAX}} = 127.33 \approx 128$$

Una densidad de siembra de 128 kg / ha produce el máximo rendimiento en grano de la nueva variedad de trigo en la región. La Figura 4.5 muestra una gráfica de esta ecuación.

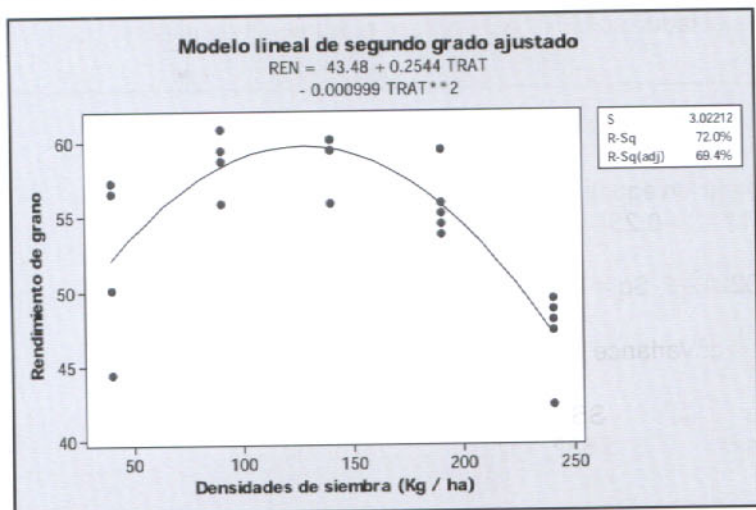


Figura 4.5 Respuesta estimada entre la producción de grano en ton/ha y la densidad de siembra

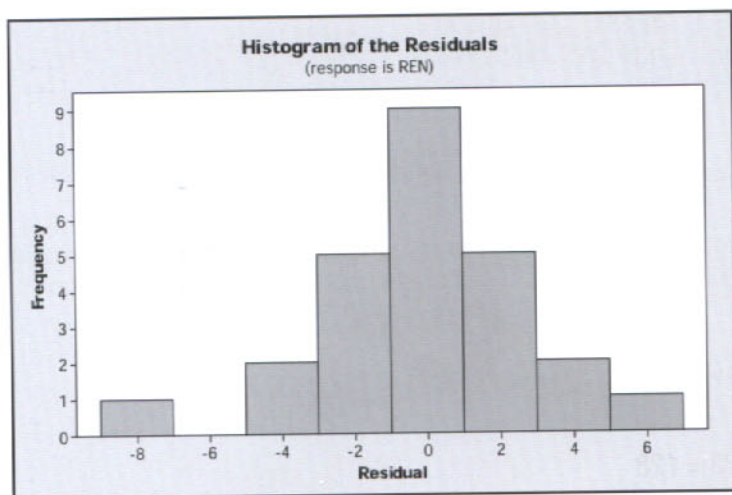


Figura 4.6 Histograma de residuales del modelo polinomial ajustado.

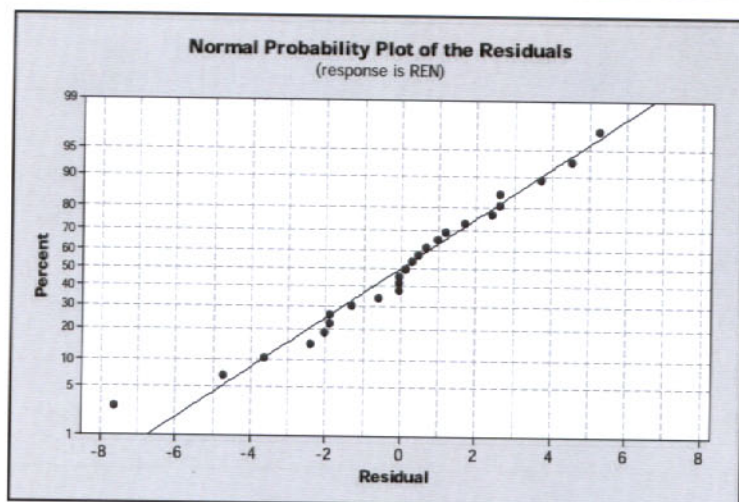


Figura 4.7 Gráfica de probabilidad normal de los residuales del modelo polinomial

REFERENCIAS

- Bhattacharyya, G. K, y Johnson, R. A., 1976. *Statistical Concepts and Methods*, J. Wiley & Sons. USA. 639 p.
- Dowdy, S y Wearden, S. 1991. *Statistics for Research*. 2 Ed. Wiley & Sons. USA. 629 p.
- Kuehl, R. O., 2001. *Diseño de Experimentos (Principios estadísticos de diseño y análisis de investigación)*. 2 Ed. Thomson – Learning. México. 666 p.
- Méndez, R. I. 1981. *Modelos Mixtos y aleatorios en el Diseño y Análisis de Experimentos*. Departamento de Estadística, IMAS – UNAM. México. 72 p.

4.5. Ejercicios de problemas diversos

- 4.1. Un ingeniero agrónomo realizó una prueba de fertilizante en una pradera, con un diseño de bloques completos al azar. Asignó al azar cinco tratamientos de fertilizante a las parcelas de cada uno de cinco bloques; obtuvo los siguientes datos 100 x (porcentaje de fósforo) en una muestra de tejido de planta de cada parcela.

		Bloque				
Tratamiento		1	2	3	4	5
1	Sin Fertilizante	7.6	8.1	7.3	7.9	9.4
2	25 kg de nitrógeno	7.3	7.7	7.7	7.7	8.2
3	50 kg de nitrógeno	6.9	6.0	5.6	7.4	7.0
4	25 kg de nitrógeno + 35 kg P_2O_5	10.8	11.2	9.0	12.9	11.6
5	50 kg de nitrógeno + 35 kg P_2O_5	9.6	9.3	12.0	10.6	10.4

(a) Calcule el análisis de varianza.

(b) Obtenga la suma de cuadrados y pruebe con $\alpha = 0.05$ cada uno de los siguientes contrastes:

- Sin fertilizante contra los cuatro tratamientos de fertilizante.
- El tratamiento 2 contra el 3.
- El tratamiento 4 contra el 5.
- Los tratamientos 2 y 3 contra el 4 y 5.

(c) ¿Los contrastes anteriores son ortogonales?

4.2. Un ingeniero estudió la eficiencia en tiempo de cuatro métodos de fabricación (A, B, C, D) de un componente electrónico. Se eligieron cuatro técnicos para el estudio; pero como el proceso de fabricación produce cansancio, el tiempo requerido (período) por un técnico aumenta al cambiar de un método a otro sin importar el orden. El ingeniero usó un diseño en cuadro latino con los «técnicos» en las columnas y los períodos en las hileras. Los métodos de fabricación se asignaron al azar a los técnicos y períodos de acuerdo a un cuadro latino. Los valores que se registraron son los tiempos de fabricación en minutos requeridos para fabricar el componente con el método indicado entre paréntesis.

	Técnico			
	1	2	3	4
Periodo de Tiempo				
1	90(C)	96(D)	84(A)	88(B)
2	90(B)	91(C)	96(D)	88(A)
3	89(A)	97(B)	98(C)	98(D)
4	104(D)	100(A)	104(B)	106(C)

(a) Calcule el análisis de varianza.

(b) Haga la prueba de Tukey y concluya.

4.3. Un horticultor realizó un experimento con fertilizante de nitrógeno para lechuga en un diseño de bloques completos aleatorizados. Asignó al azar 5 tasas de nitrato de amonio (0, 50, 100, 150 y 200 kg/ha) a cada dos parcelas en cada uno de los dos bloques. Cada bloque estuvo formado por 10 parcelas, dos para cada tratamiento en cada bloque. Los siguientes datos son el número de lechugas en cada parcela.

Nitrógeno	Bloque 1		Bloque 2	
0	104	114	109	124
50	134	130	154	164
100	146	142	152	156
150	147	160	160	163
200	133	146	156	161

(a) Obtenga el análisis de varianza según el modelo de bloques generalizados y pruebe la hipótesis nula correspondiente.

(b) Pruebe la suposición de no interacción de bloques x tratamiento.

(c) Mediante contrastes pruebe el efecto lineal y cuadrático del nitrógeno. Interprete los resultados.

- 4.4. Se realizó un experimento de parcelas para evaluar la interacción entre los tiempos de aplicación de nitrógeno al suelo (pronto, óptimo y tarde) y dos niveles de inhibidor de nitrificación (ninguno y 0.5 kg/ha). El inhibidor retrasa la conversión de las formas de amonio del nitrógeno en formas de nitrato móviles para reducir las pérdidas de nitratos derivados. El nitrógeno se suministró mediante impulsos marcados de ^{15}N a través de un sistema de irrigación por goteo en tres tiempos: pronto, óptimo y tarde. Los siguientes datos de ^{15}N son el porcentaje de ^{15}N que absorbieron las plantas de maíz cultivadas en las parcelas.

Bloque	Inhibidor de nitrógeno					
	Ninguno			0.5 kg/ha		
	Pronto	Óptimo	Tarde	Pronto	Óptimo	Tarde
1	21.4	50.8	53.2	54.8	56.9	57.7
2	11.3	42.7	44.8	47.9	46.8	54.0
3	34.9	61.8	57.8	40.1	57.9	62.0

- (a) Calcule el análisis de varianza y pruebe la hipótesis nula.
- (b) Mediante contrastes pruebe la interacción y los efectos principales.
- (c) Escriba sus conclusiones.
- 4.5. Un ingeniero agrónomo realizó una prueba de alimentación para reses con cuatro tratamientos compuestos de diferentes calidades de agua potable para los animales. Usó un diseño totalmente aleatorizado con dos repeticiones. El experimento se llevó a cabo en los meses de primavera y de invierno dos años seguidos y cada una de las dos pruebas duró 112 días. Los siguientes datos son las ganancias de peso promedio diarias en cada corral de animales para cada prueba.

Tratamiento	Año 1		Año 2	
	Primavera	Invierno	Primavera	Invierno
1	1.81	2.14	2.06	2.17
	1.88	2.32	1.91	2.55
2	1.77	2.27	1.57	2.06
	1.60	2.02	1.32	2.20
3	1.85	2.13	1.51	2.25
	1.59	1.93	1.49	1.94
4	1.51	1.85	1.31	1.83
	1.56	1.95	1.20	2.15

- a) Calcule un análisis de varianza para cada una de las cuatro pruebas considerando un diseño completamente al azar.
- b) Realice una prueba de homogeneidad de varianzas considerando todos los datos.
- c) Calcule un análisis de varianza combinado para las cuatro pruebas considerando los factores: año, estación del año y tratamiento como efectos fijos. Presente el análisis de varianza con los efectos principales e interacciones. Obtenga sus conclusiones.
- d) Suponga que los años son efectos aleatorios (bloques) y que las estaciones y tratamientos son efectos fijos. Obtenga sus conclusiones.
- 4.6. Debe realizar un experimento con un diseño de bloques completos al azar con $t = 6$ tratamientos en $r = 4$ bloques.
- b) Proporcione una asignación aleatoria de 6 tratamientos a las unidades experimentales con un diseño de bloques completos al azar, muestre el detalle de su procedimiento de aleatorización.

- c) ¿Cuántos arreglos distintos de tratamientos son posibles en cada bloque?
- d) ¿Cuántos arreglos distintos son posibles para todo el experimento?
- 4.7. Debe realizar un experimento en cuadro latino con $t = 5$ tratamientos. Seleccione uno de los cuadros latinos normales del apéndice de este capítulo y aleatorice los cinco tratamientos a las unidades experimentales en el arreglo y muestre los detalles de su aleatorización.
- 4.8. Usted debe llevar a cabo una prueba *in-vitro* de digestión de alimentos en matraces que deben inocularse con CO_2 y microorganismos rumiados obtenidos de un novillo justo antes de inocular los matraces. El oxígeno y las temperaturas menores a $37^\circ C$ pueden afectar a los microorganismos de manera adversa. Dado el tiempo requerido para agregar el y los microorganismos a los matraces, aun en las mejores condiciones, los primeros matraces reciben microorganismos sanos, pero los posteriores reciben microorganismos con actividad reducida.
- a) Suponiendo que tiene 5 tratamientos y 25 matraces que inocular en serie, establezca un diseño de bloques completos que controle la variación causada por la actividad reducida de los microorganismos por la exposición.
- b) Bosqueje el análisis de varianza para los datos del estudio, incluyendo la fuente de variación y los grados de libertad para cada partición de suma de cuadrados.
- 4.9. Usted debe realizar un estudio para determinar la contaminación de los ríos debida a la actividad humana en un bosque, para lo cual ha localizado cuatro ríos, cada uno con una pequeña comunidad permanente cercana y una planta de procesamiento de desperdicio en el cause del río. Además, cada río tiene un campamento recreativo grande localizado a 8 ó 15 kilómetros río abajo de la comunidad.

Usted debe tomar muestras del agua de los 4 ríos: una muestra río arriba de la comunidad, otra muestra a kilómetro y medio río abajo y otras dos justo antes y después del campamento recreativo.

También debe tomar una muestra en cada uno de cuatro días de la semana: viernes, domingo, lunes y miércoles, pero como tiene recursos limitados sólo puede tomar 4 muestras de agua de cada río para obtener un total de 16 muestras para todo el estudio.

a) Establezca un diseño de bloques completos al azar para adquirir las muestras de agua, con la «localización en el río» como factor de tratamiento.

(a) Bosqueje el análisis de varianza para los datos, incluyendo la fuente de variación y los grados de libertad para cada partición de suma de cuadrados.

(b) Suponga que toma dos muestras de agua cada vez que toma una muestra de la localización en el río y repita el inciso (b).

4.10. Un científico realizó un experimento para comparar el porcentaje de proteína cruda (materia seca) equivalente en maíz ensilado no tratado y maíz ensilado tratado con urea. Once silos de cada tipo fueron elegidos (aleatoriamente) por muestreo con el propósito de contar con una muestra representativa. El material en cada silo fue muestreado de cuatro partes del silo (1 = arriba, . . . , 4 = abajo), se tomó una sola muestra de cada una de las cuatro partes del silo. Los datos se presentan a continuación.

Silos Tratados con Urea	Parte del Sitio			
	1	2	3	4
1	13.9	13.8	14.9	15.1
2	18.6	16.5	14.5	14.4
3	15.1	13.7	17.1	16.3
4	14.1	13.4	13.7	15.3
5	15.4	12.9	14.3	14
6	14.4	14.5	16.4	14.5
7	14.8	14.9	14.6	14
8	12.6	14.4	13.1	13.8
9	14.6	14.2	12.7	13.3
10	19.8	14	15.4	17.2
11	11.2	15.6	13.8	15.1

Silos de Control	1	2	3	4
1	10.2	9	10	11.6
2	9.9	9.7	8.2	11
3	11.7	10.4	10.2	9.6
4	11.2	11.9	10.3	10
5	9.5	8.9	9.7	9.5
6	9.4	9.5	9.6	10.5
7	8.4	9.8	10	9.5
8	10.6	9.4	11.4	9.4
9	11.2	10.1	9.7	10.3
10	10.5	11.2	10	9.6
11	11.3	11	10.9	10.4

El científico desea contestar dos preguntas:

1. ¿Es efectivo el tratamiento con urea para incrementar el contenido proteico?
2. Los contenidos de proteína difieren en las cuatro partes de los silos en general.
 - a) Escriba un modelo para el experimento.
 - b) Pruebe los efectos del modelo y concluya en el contexto del problema.

CAPÍTULO 5

ANÁLISIS DE EXPERIMENTOS CON MUESTREO EN LAS UNIDADES EXPERIMENTALES

Existen diversas circunstancias en las que para coleccionar los datos que requiere una investigación, es necesario o conveniente obtener muestras aleatorias de las unidades del experimento; de esta manera la unidad observada es una muestra. Por ejemplo, al tomar una muestra de varias plantas en un cultivo para medir la incidencia de una enfermedad, o en ocasiones en trabajos de campo el investigador puede no tener tiempo para cosechar totalmente cada parcela experimental. En ese caso, podrá seleccionar al azar varios cuadros de parcela y cosechar el grano de cada cuadro seleccionado, en esta situación, describiríamos estas observaciones como muestras dentro de unidades experimentales.

Desafortunadamente, está extendida la práctica de analizar datos experimentales obtenidos mediante muestreo en las unidades experimentales incorporando como variable respuesta al promedio aritmético de las muestras. Sin embargo, esta práctica es incorrecta ya que se pierde la información contenida en la variabilidad propia del muestreo.

El análisis de experimentos que involucran muestras requiere tener conocimiento de la fuente de variación que compone al error experimental. Es clara esta fuente de variación en los diseños completamente al azar y bloques completos al azar. Sin embargo, el análisis de experimentos con muestreo en los diseños más complicados hace difícil reconocer las fuentes de variación que configuran el error experimental.

En este capítulo se expone brevemente un algoritmo desarrollado por Zamudio y Alvarado (1996) mediante el cual es posible analizar experimentos con igual número de muestra en las unidades experimentales. Todos los ejemplos de este capítulo se presentan haciendo uso de la computadora con el programa SAS.

Se inicia esta presentación con el análisis de experimentos completamente al azar y bloques completos al azar con igual número de muestras en las unidades experimentales.

5.1 Diseño completamente al azar con muestreo en las unidades experimentales

El modelo estadístico en este diseño con igual número de muestras es:

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{j(i)} + \delta_{k(j)}; \quad i = 1, \dots, t; \quad j = 1 \dots n; \quad k = 1 \dots m$$

Donde:

Y_{ijk} : representa el valor de la característica en estudio correspondiente a la k-ésima

muestra de la j -ésima unidad experimental sujeta al tratamiento i -ésimo.

μ : media general, común a todas las unidades experimentales antes de aplicar los tratamientos.

τ_i : Efecto del i -ésimo tratamiento.

$\varepsilon_{j(i)}$: es el error experimental correspondiente a la j -ésima unidad experimental anidado en el i -ésimo tratamiento.

$\delta_{k(ij)}$: es el error de muestreo de la k -ésima muestra anidado en la j -ésima unidad experimental sujeta al i -ésimo tratamiento.

La tabla del análisis de varianza para el modelo lineal descrito se aprecia enseguida.

Tabla 5.1 Análisis de varianza para experimentos con diseño completamente al azar con n repeticiones por tratamiento y m muestras por unidad experimental.

Fuente de Variación	Grados de libertad	Sumas de cuadrados	Cuadrados medios	F_0
Tratamientos	$t - 1$	$(n \times m) \sum_{i=1}^t (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2$	$\frac{SCTRAT}{t - 1}$	$\frac{CMT}{CME EXP.}$
Error exp.	$t(n - 1)$	$m \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^n (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i.})^2$	$\frac{SCERROR}{t(n - 1)}$	
Error muestreo	$tn(m-1)$	por diferencia		
Total corregido	$tnm - 1$	$\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m (Y_{ijk} - \bar{Y}_{..})^2$		

Ejemplo 5.1 Un agrónomo realizó un experimento para comparar los efectos de 5 fertilizantes, respecto del rendimiento de una variedad de cebada usada en el proceso de producción de cerveza. Se disponía de 16 parcelas experimentales homogéneas y al azar se asignaron 4 a cada uno de 4 tratamientos de fertilización. Al momento de la cosecha, se tomaron 3 cuadros muestra (al azar) de cada área útil de las parcelas experimentales y se obtuvo el rendimiento de cada uno de los 48 cuadros. La Tabla 5.2 presenta los datos obtenidos.

Tabla 5.2 Datos obtenidos de los rendimientos de 16 cuadros muestra.

Tratamientos de Fertilizante			
1	2	3	4
39	57	91	102
39	61	82	93
43	61	98	97
23	74	405	103
63	47	85	90
18	69	85	105
48	61	78	99
35	60	89	87
48	75	95	113
50	68	85	117
37	65	74	93
19	61	80	107

Enseguida se presenta un programa SAS para el análisis estadístico del ejemplo 5.1.

```

DATA CACSM;
INPUT TRAT REP OBS @@;
CARDS;
1 1 39 1 1 39 1 1 43 1 2 23 1 2 36 1 2 18 1 3 48 1 3 35 1 3 48 1 4 50 1 4 37 1 4 19
2 1 57 2 1 61 2 1 61 2 2 74 2 2 47 2 2 69 2 3 61 2 3 60 2 3 75 2 4 68 2 4 65 2 4 61
3 1 91 3 1 82 3 1 98 3 2 105 3 2 85 3 2 85 3 3 78 3 3 89 3 3 95 3 4 85 3 4 74 3 4 80
4 1 102 4 1 93 4 1 98 4 2 103 4 2 90 4 2 105 4 3 99 4 3 87 4 3 113 4 4 117 4 4 93 4 4
107;

PROC ANOVA; CLASS TRAT REP;
MODEL OBS = TRAT REP(TRAT);
TEST H = TRAT E = REP(TRAT);
MEANS TRAT / TUKEY E = REP(TRAT);
RUN;
    
```

Procedimiento ANOVA

Variable dependiente: OBS

Fuente	DF	Suma de cuadrados	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
Modelo	15	29830.00000	1988.66667	22.92	<.0001
Error	32	2776.66667	86.77083		
Total correcto	47	32606.66667			

R-cuadrado	Coef Var	Raiz MSE	OBS Media
0.914844	12.96764	9.315086	71.83333

Fuente	DF	Anova SS	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
TRAT	3	28849.00000	9616.33333	110.82	<.0001
REP(TRAT)	12	981.00000	81.75000	0.94	0.5197

Tests de hipótesis usando el MS Anova para REP(TRAT) como un término de error

Fuente	DF	Anova SS	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
TRAT	3	28849.00000	9616.33333	117.63	<.0001

Procedimiento ANOVA

Prueba del rango estudentizado de Tukey (HSD) para OBS

NOTA: Este test controla el índice de error experimentwise de tipo I, pero normalmente tiene un índice de error de tipo II más elevado que REGWQ.

Alfa	0.05
Error de grados de libertad	12
Error de cuadrado medio	81.75
Valor crítico del rango estudentizado	4.19852
Diferencia significativa mínima	10.958

Medias con la misma letra no son significativamente diferentes.

Tukey Agrupamiento	Media	N	TRAT
A	100.583	12	4
B	87.250	12	3
C	63.250	12	2
D	36.250	12	1

Explicación: Se ajusta el modelo lineal reducido mediante la instrucción:

OBS = TRAT REP(TRAT); en este modelo, el término TRAT es el factor tratamientos de fertilización, el término REP(TRAT) es el error experimental que ocurre anidado de acuerdo a una estructura jerárquica. El error de muestreo también ocurre anidado y aparece en el reporte de salida como error con 32 grados de libertad. La instrucción: TEST H = TRAT E = REP(TRAT); solicita ejecutar la prueba de hipótesis sobre tratamientos utilizando el término de error siguiente REP(TRAT) con 12 grados de libertad que, como ya se dijo, es el error experimental. Adicionalmente, se solicita una prueba de comparación múltiple de medias de Tukey con un nivel de significancia del 95%. Cabe hacer notar que en esta instrucción es necesario indicar también el término de error que debe emplearse en esta prueba, a saber REP(TRAT).

Interpretación: La prueba de hipótesis sobre tratamientos se basa en la estadística de prueba $F = 117.63$ este valor de F tiene un nivel observado de significancia $\alpha = 0.0001$. La prueba de comparación múltiple de medias de Tukey indica superioridad en rendimiento del tratamiento de fertilización 4.

La tabla de análisis de varianza se reporta a continuación.

5.2. Diseño en bloques completos al azar con muestreo en las unidades experimentales.

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrados Medios	F_0	Pr > F
Tratamientos	3	28849.0000	9616.3333	117.63	< 0.0001
Error Exp.	12	981.0000	81.7500		
Error Muestro	32	2776.6667	86.7708		
Total	47	32606.6667			

5.2. Diseño en bloques completos al azar con muestreo en las unidades experimentales.

El modelo estadístico en este diseño con igual número de muestras es:

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} + \delta_{ijk}; \quad i = 1, \dots, t; \quad j = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, m$$

Donde:

Y_{ijk} : representa el valor en la k-ésima muestra de la j-ésima unidad experimental sujeta al tratamiento i-ésimo.

μ : media general, común a todas las unidades experimentales antes de aplicar los tratamientos.

τ_i : Efecto del i-ésimo tratamiento.

β_j : Efecto del j-ésimo bloque.

ε_{ij} : es el efecto verdadero de la j-ésima unidad experimental sujeta al i-ésimo tratamiento.

$\delta_{k(ij)}$: es el error de muestreo de la k-ésima muestra anidado en la unidad experimental correspondiente al i-ésimo tratamiento localizado en el j-ésimo bloque.

La Tabla 5.4 presenta el análisis de varianza para el modelo lineal descrito.

Tabla 5.4 Análisis de varianza para experimentos con diseño en bloques completos al azar con m muestras por unidad experimental.

Fuente de Variación	Grados de libertad	Sumas de cuadrados	Cuadrados medios	F_0
Bloques	$b - 1$	$(t \times m) \sum_{j=1}^b (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{...})^2$	$\frac{SCBLOQUES}{b - 1}$	
Tratamientos	$t - 1$	$(b \times m) \sum_{i=1}^t (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2$	$\frac{SCTRAT}{t - 1}$	$\frac{CMTRAT}{CM ERROR EXP}$
Error exp.	$(b - 1)(t - 1)$	$m \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^b (Y_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...})^2$	$\frac{SCERROR EXP}{(b - 1)(t - 1)}$	
Error muestreo	$bt(m - 1)$	por diferencia		
Total corregido	$btm - 1$	$\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^m (Y_{ijk} - \bar{Y}_{...})^2$		

Ejemplo 5.2 Se llevó a cabo un experimento para conocer el efecto relativo de 4 fertilizantes en el rendimiento de una cierta variedad de avena. La localización de las 16 parcelas experimentales disponibles para el experimento fue tal que el investigador juzgó conveniente agruparlas en 4 bloques de 4 parcelas cada uno. Después, los tratamientos se asignaron al azar dentro de cada bloque. Al momento de la cosecha, el investigador decidió cosechar (para fines de análisis) únicamente 3 cuadros muestra del área útil de cada parcela. Los datos obtenidos se presentan en la Tabla 5.4.

Tabla 5.5 Datos obtenidos de los rendimientos de 16 cuadros muestra del experimento de avena.

Bloques	Tratamientos de Fertilización			
	1	2	3	4
1	39	57	91	102
	39	61	82	93
	43	61	98	97
2	23	74	105	103
	36	47	85	90
	18	69	85	105
3	48	61	78	99
	35	60	89	87
	48	75	95	113
4	50	68	85	117
	37	65	74	93
	19	61	80	107

Enseguida se presenta un programa SAS para el análisis estadístico del ejemplo 5.2.

```
DATA BCACSM;
INPUT TRAT BLOQUE OBS @@;
CARDS;
1 1 39 1 1 39 1 1 43 1 2 23 1 2 36 1 2 18 1 3 48 1 3 35 1 3 48 1 4 50 1 4 37 1 4 19
2 1 57 2 1 61 2 1 61 2 2 70 2 2 47 2 2 69 2 3 61 2 3 60 2 3 75 2 4 68 2 4 65 2 4 61
3 1 91 3 1 82 3 1 98 3 2 105 3 2 85 3 2 85 3 3 78 3 3 89 3 3 95 3 4 85 3 4 74 3 4 80
4 1 102 4 1 93 4 1 98 4 2 103 4 2 90 4 2 105 4 3 99 4 3 87 4 3 113 4 4 117 4 4 93 4 4
107;
```

```

PROC GLM; CLASS TRAT BLOQUE;
MODEL OBS = TRAT BLOQUE BLOQUE*TRAT;
TEST H = TRAT E=BLOQUE*TRAT;
MEANS TRAT / TUKEY E=BLOQUE*TRAT;
CONTRAST'T2 VS T3' TRAT 0 1 -1 0 /E=BLOQUE*TRAT;
RUN;

```

Procedimiento GLM

Variable dependiente: OBS

Fuente	DF	Suma de cuadrados	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
Modelo	15	29903.00000	1993.53333	23.61	<.0001
Error	32	2702.00000	84.43750		
Total correcto	47	32605.00000			

R-cuadrado	Coef Var	Raiz MSE	OBS Media
0.917129	12.80695	9.188988	71.75000

Fuente	DF	Tipo I SS	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
TRAT	3	28918.66667	9639.55556	114.16	<.0001
BLOQUE	3	115.66667	38.55556	0.46	0.7145
TRAT*BLOQUE	9	868.66667	96.51852	1.14	0.3629

Tests de hipótesis usando el MS Tipo III para TRAT*BLOQUE como un término de error

Fuente	DF	Tipo III SS	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
TRAT	3	28918.66667	9639.55556	99.87	<.0001

Procedimiento GLM
Prueba del rango estudentizado de Tukey (HSD) para OBS

NOTA: Este test controla el índice de error experimentwise de tipo I, pero normalmente tiene un

índice de error de tipo II más elevado que REGWQ.

Alfa	0.05
Error de grados de libertad	9
Error de cuadrado medio	96.51852
Valor crítico del rango estudentizado	4.41490
Diferencia significativa mínima	12.521

Medias con la misma letra no son significativamente diferentes.

Tukey Agrupamiento	Media	N	TRAT
A	100.583	12	4
B	87.250	12	3
C	62.917	12	2
D	36.250	12	1

Procedimiento GLM

Variable dependiente: OBS

Tests de hipótesis usando el MS Tipo III para TRAT*BLOQUE como un término de error

Contraste	DF	Contraste SS	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
T2 VS T3	1	3552.666667	3552.666667	36.81	0.0002

Explicación: Se ajusta el modelo lineal reducido mediante la instrucción:

MODEL OBS = TRAT BLOQUE BLOQUE*TRAT; En este diseño, debido a que no hay repeticiones verdaderas se utiliza la interacción BLOQUE*TRAT como un término de error para realizar las inferencias sobre tratamientos. El error de muestreo ocurre anidado de acuerdo a una estructura jerárquica y aparece en el reporte de resultados como error con 32 grados de libertad. La instrucción: TEST H = TRAT E=BLOQUE*TRAT; solicita realizar la prueba estadística sobre tratamientos utilizando el término de error BLOQUE*TRAT misma que debe reportarse en lugar de la prueba que realiza SAS utilizando el error de muestreo. Solo con fines ilustrativos se solicitan dos pruebas adicionales a saber: una prueba de comparaciones múltiples de medias de Tukey al 95% y un contraste que prueba la hipótesis: $H_0 : \tau_2 - \tau_3 = 0$. Las instrucciones para estas pruebas son:

MEANS TRAT / TUKEY E=BLOQUE*TRAT;
CONTRAST'T2 VS T3' TRAT 0 1 -1 0/E=BLOQUE*TRAT;

Nótese que en ambas pruebas es necesario indicar el término de error a usar.

La prueba de Tukey indica que el tratamiento de fertilización 4 es el que produce los más altos rendimientos.

La tabla de análisis de varianza se reporta de la siguiente manera:

Tabla 5.6 Análisis de varianza para el diseño de bloques completos al azar con muestreo en las unidades experimentales.

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrados Medios	F_0	Pr > F
Tratamientos	3	28918.6667	9639.5555	99.87	< 0.0001
Bloque	3	115.6667	38.5556		
Error Exp.	9	868.6667	96.5185		
Error Muestro	32	2702.0000	84.4375		
Total	47	32605.0000			

5.3. Diseño en cuadro latino con muestreo en las unidades experimentales

En este diseño, a diferencia de los dos anteriores, no es fácil identificar los componentes del error experimental; por tal motivo, antes de proceder con el análisis estadístico, se

presenta el algoritmo mencionado al inicio de este capítulo.

5.3.1. Algoritmo general para el análisis de diseños experimentales con igual tamaño de muestra en las unidades experimentales

Suponga que en un experimento con n unidades experimentales se toma una muestra aleatoria de m mediciones cuantitativas de la variable respuesta en cada unidad experimental; entonces habrá $n \times m$ observaciones en total. Denótese como Y_{ij} a la j -ésima medición de la i -ésima unidad experimental, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Para resolver cualquier diseño experimental con igual número de mediciones muestrales por unidad experimental, siga los siguientes pasos:

PASO 1. Ajuste un modelo basado en las unidades experimentales. Dicho ajuste se hace sobre los datos originales Y_{ij} y proporciona las siguientes sumas de cuadrados:

- Suma de cuadrados total (SCT).

$$SCT = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2$$

- Suma de cuadrados del factor unidades experimentales [SC(UE)]

$$SC(UE) = m \sum_{i=1}^n (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2$$

- Suma de cuadrados del error de muestreo (SCEM)

$$SCT = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2$$

Observe que, en este primer paso del algoritmo, solo se requiere saber a qué unidad experimental pertenece cada conjunto de datos muestrales; esto es, no hace falta saber si la observación pertenece a determinado bloque o si se obtuvo en la intersección de una hilera y una columna específicos.

PASO 2. Ajuste un segundo modelo que usa como variable respuesta $\frac{Y_{i.}}{\sqrt{m}}$

(total de la i -ésima unidad experimental entre la raíz cuadrada del tamaño de muestra m). Este ajuste particiona a la $SC(UE)$ del paso anterior en las sumas de cuadrados de las fuentes de variación correspondientes al diseño experimental que se esté analizando. Se reitera que la SCT que se obtenga en el paso 2 corresponde en realidad a la $SC(UE)$ que se obtuvo en el paso 1, ya que precisamente se trata de particionar esta última suma de cuadrados en sus fuentes de variación correspondientes al diseño experimental particular.

PASO 3. Organizar las diversas sumas de cuadrados obtenidas en los pasos anteriores de acuerdo al modelo de diseño experimental particular en la denominada tabla de análisis de varianza.

A continuación se presenta un ejemplo con el diseño en cuadro latino utilizando los mismos datos que utilizan los autores del algoritmo.

Ejemplo 5.3 Considere los siguientes datos sobre un experimento de aclareos del área basal realizado en el ejido La Victoria, Pueblo Nuevo, Durango en un bosque de *Pinus cooperi*. Se usó un cuadro latino de 6×6 para ensayar seis diferentes intensidades (en %) de aclareo del área basal (tratamientos) con la finalidad de estudiar la influencia que esta práctica silvícola ejerce sobre el diámetro, la altura y la proyección de copa del arbolado. Como variable respuesta, se midieron los incrementos del diámetro normal (a 1.3 m) en un periodo de cuatro años, y se consideraron tres mediciones muestrales por unidad experimental. El % de aclareo del área basal en los seis tratamientos aplicados en este experimento, así como la distribución de los tratamientos en el terreno se presentan a continuación:

Tratamiento		% de aclareo del área					
	A	20					
	B	30					
	C	50					
	D	70					
	E	100					
	F	0					

Hileras	Columnas					
I	I	II	III	IV	V	VI
II	F	E	D	C	B	A
III	E	C	A	D	F	B
IV	B	A	F	E	D	C
V	A	B	E	F	C	D
VI	C	D	B	A	E	F

Tabla 5.7 Incremento del diámetro normal de árboles de *Pinnus cooperi* en un período de cuatro años (medido en cm).

Hileras	Columnas					
	I	II	III	IV	V	VI
I	1.6	1.5	3.0	2.9	1.9	1.5
	2.2	2.1	1.8	1.8	1.6	3.0
	2.7	3.4	3.1	3.7	2.8	3.3
II	1.7	3.1	2.4	3.0	1.4	1.8
	3.4	2.2	2.5	1.7	3.0	1.7
	2.0	2.7	2.5	1.8	2.8	2.4
III	1.8	2.3	2.8	1.7	1.8	2.2
	2.7	2.0	2.2	3.1	3.3	1.3
	2.6	3.5	1.8	3.5	2.4	1.4
IV	1.9	1.8	2.5	3.0	1.8	1.5
	2.6	2.9	2.4	1.9	2.7	2.9
	1.7	1.7	2.6	2.4	2.3	2.0
V	2.6	3.0	1.6	2.3	3.0	3.2
	1.8	2.2	2.3	2.2	1.9	3.3
	1.9	2.2	2.3	3.0	2.3	2.5
VI	1.8	2.4	2.2	2.0	2.6	3.3
	2.8	1.8	3.0	1.9	3.2	2.4
	2.3	2.3	1.5	2.2	2.2	2.6

En base al algoritmo antes expuesto el análisis de un experimento en cuadro latino con igual número de muestra por unidad experimental, se puede realizar con los siguientes programas en SAS.

DATA CLUE;

INPUT UE OBS @@; CARDS;

```
1 1.6 1 2.2 1 2.7 2 1.7 2 3.4 2 2.3 1.8 3 2.7 3 2.6 4 1.9 4 2.6 4 1.7 5 2.6 5 1.8 5 1.9 6 1.8
6 2.8 6 2.3
7 1.5 7 2.1 7 3.4 8 3.1 8 2.2 8 2.7 9 2.3 9 2.9 9 3.5 10 1.8 10 2.9 10 1.7 11 3 11 2.2 11 2.2
12 2.4 12 1.8 12 2.3
13 3 13 1.8 13 3.1 14 2.4 14 2.5 14 2.5 15 2.8 15 2.2 15 1.8 16 2.5 16 2.5 16 2.6 17 1.6
```



```

1.6 17 2.3 17 2.3 18 2.2 18 3 18 1.5
19 2.9 19 1.8 19 3.7 20 3 20 1.7 20 1.8 21 1.7 21 3.1 21 3.5 22 3 22 1.9 22 2.4 23 2.3 23
2.2 23 3 24 2 24 1.9 24 2.2
25 1.9 25 1.6 25 2.8 26 1.4 26 3 26 2.8 27 1.8 27 3.3 27 2.4 28 1.8 28 2.7 28 2.3 29 3 29
1.9 29 2.3 30 2.6 30 3.2 30 2.2
31 1.5 31 3 31 3.3 32 1.8 32 1.7 32 2.4 33 2.2 33 1.3 33 1.4 34 1.5 34 2.9 34 2 35 3.2 35
3.3 35 2.5 36 3.3 36 2.4 36 2.6;
PROC ANOVA; CLASS UE; MODEL OBS = UE;
RUN;
DATA MUESCL;
INPUT COL HIL TRAT $ SUM @@; SUMT= (SUM)/SQRT(3);
CARDS;
1 1 F 6.5 1 2 E 7.1 1 3 B 7.1 1 4 A 6.2 1 5 D 6.3 1 6 C 6.9
2 1 E 7 2 2 C 8 2 3 A 7.8 2 4 B 6.4 2 5 F 7.4 2 6 D 6.5
3 1 D 7.9 3 2 A 7.4 3 3 F 6.8 3 4 E 7.6 3 5 C 6.2 3 6 B 6.7
4 1 C 8.4 4 2 D 6.5 4 3 E 8.3 4 4 F 7.3 4 5 B 7.5 4 6 A 6.1
5 1 B 6.3 5 2 F 7.2 5 3 D 7.5 5 4 C 6.8 5 5 A 7.2 5 6 E 8
6 1 A 7.8 6 2 B 5.9 6 3 C 4.9 6 4 D 6.4 6 5 E 9 6 6 F 8.3;
PROC ANOVA; CLASS HIL COL TRAT;
MODEL SUMT = HIL COL TRAT;
RUN;

```

Tabla 5.8 Salida de SAS para un cuadro latino con muestreo en las unidades experimentales (Paso 1).

Procedimiento ANOVA					
Variable dependiente: OBS					
Fuente	DF	Suma de cuadrados	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
Modelo	35	8.28518519	0.23671958	0.62	0.9364
Error	72	27.28666667	0.37898148		
Total correcto	107	35.57185185			
	R-cuadrado	Coef Var	Raiz MSE	OBS Media	
	0.232914	26.05266	0.615615	2.362963	
Fuente	DF	Anova SS	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
UE	35	8.28518519	0.23671958	0.62	0.9364

Tabla 5.9 Salida de SAS para un cuadro latino con muestreo en las unidades experimentales (paso 2).

Procedimiento ANOVA					
Variable dependiente: SUMT					
Fuente	DF	Suma de cuadrados	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
Modelo	15	2.62222222	0.17481481	0.62	0.8278
Error	20	5.66296296	0.28314815		
Total correcto	35	8.28518519			
	R-cuadrado	Coef Var	Raiz MSE	SUMT Media	
	0.316495	13.00138	0.532117	4.092772	
Fuente	DF	Anova SS	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
HIL	5	0.36518519	0.07303704	0.26	0.9307
COL	5	0.49851852	0.09970370	0.35	0.8748
TRAT	5	1.75851852	0.35170370	1.24	0.3268

Explicación: Los dos programas se pueden correr al mismo tiempo. El primero abre la sesión de trabajo con el DATA CLUE y realiza el primer paso del algoritmo al ajustar el modelo para las unidades experimentales; UE. Nótese que en este DATA se incluyen las $6 \times 6 \times 3 = 108$ observaciones originales. Además no se incluye la referencia de hileras, columnas o tratamientos. La salida de este programa se presenta en la Tabla 5.8.

El segundo programa trabaja con el DATA MUESCL. Este DATA contiene información sobre el modelo de diseño experimental; en este caso el cuadro latino incluye hileras, columnas, tratamientos y las observaciones. En este paso 2, la variable observaciones es la suma de las tres mediciones muestrales realizadas en cada unidad experimental por esa razón se tienen solo $6 \times 6 = 36$ datos. La variable original SUM se transforma en

la variable $\frac{Y_i}{\sqrt{3}}$ a la cual se le asigna el nombre SUMT mediante la siguiente instrucción:

SUMT=(SUM)/SQRT(3);

Posteriormente, se ajusta el modelo lineal del cuadro latino para la variable respuesta SUMT mediante las siguientes instrucciones:

```
PROC ANOVA; CLASS HIL COL TRAT;
MODEL SUMT = HIL COL TRAT;
RUN;
```

la salida de computadora se presenta en la Tabla 5.9

Finalmente, en el paso 3 se organiza la información de las dos tablas para generar la Tabla 5.10 del análisis de varianza.

Tabla 5.10 Análisis de varianza del cuadro latino con igual número de observaciones muestrales por unidad experimental del ejemplo 5.3.

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrados Medios	F_0	Pr > F
UE	35	8.285185	0.23672		
Hil	5	0.365185	0.073037		
Col	5	0.498519	0.099704		
Trar	5	1.758519	0.351704	1.24	0.3268
EE	20	5.662963	0.283148		
EM	72	27.286667			
Total	107	35.571852			

Interpretación: El nivel observado de significancia para el factor tratamientos es $\alpha = 0.3268$. Por lo tanto se concluye que el aclareo del área basal en árboles *Pinus cooperi* no influye significativamente sobre el incremento del diámetro normal.

REFERENCIAS

Zamudio, S. F. y Alvarado, S. A., 1996. Análisis de Diseños Experimentales con Igual Número de Submuestras, Universidad Autónoma Chapingo, División de Ciencias Forestales. México. 84 p.

Ostle, B. 1965. *Estadística Aplicada*, Limusa-Wiley, S. A. México. 629 p.



CAPÍTULO 6

EXPERIMENTOS FACTORIALES

En este capítulo se presenta el procedimiento estadístico para estudiar el efecto de varios factores simultáneamente. Se discuten sus características, su notación y las ventajas de los experimentos factoriales en las modalidades que se presentan con mayor frecuencia en las investigaciones agropecuarias.

6.1. Características de los experimentos factoriales

El término experimento factorial se refiere a la manera de definir a los tratamientos o poblaciones que se requiere estudiar. En este contexto, el término «diseño de tratamientos» indica la selección de factores, sus niveles y la combinación de ellos. En contraste, el diseño experimental, como se explicó en el Capítulo 3, se refiere a la manera en que se asignan los tratamientos a las unidades experimentales. En este capítulo se estudian los experimentos factoriales en el diseño experimental completamente al azar.

Los experimentos factoriales tienen la ventaja de que incrementan su eficiencia ya que cada observación proporciona información sobre todos los factores y es posible estudiar la interacción. Ello permite determinar el grado y la forma en la cual se modifica el efecto de un factor por los niveles de los otros factores. La interacción entre factores se presenta cuando la respuesta, a uno de los factores observados, cambia en función de los niveles del otro factor.

La principal desventaja de los experimentos factoriales se presenta cuando se estudia un número grande de factores, o bien cuando se estudian muchos niveles de algunos factores, ya que dan lugar a un gran número de tratamientos y, en consecuencia, aumenta el costo del experimento. Esta desventaja se minimiza mediante el principio de "confusión" que permite que se pruebe solo una parte de los tratamientos.

Algunos ejemplos de factores y variables que con frecuencia se estudian simultáneamente son:

Factor	Variable Respuesta
Luz, oxígeno y temperatura	Crecimiento de microorganismos
Densidad de siembra y niveles de Fertilización	Rendimiento de cultivos agrícolas
Contenido de nitrógeno, fósforo y Potasio	Rendimiento de cultivos
Cantidad de fibra, proteínas y Carbohidratos en raciones	Producción de carne, leche, huevo, lana, etc.
Tipo de pesticidas y variedad	Rendimiento de cultivos.

6.2. Notación y términos

Los tratamientos se denotan por los niveles de los factores que los componen. Los factores se denotan con letras latinas minúsculas. Así, se habla de factores a , b , c , etc. Los niveles de un factor se denotan por subíndices, así a_i , b_j , c_k denotan el nivel i de a , el nivel j de b y el nivel k de c .

En esta obra se identifican de dos maneras:

1. Con letras y números. Por ejemplo, varios tratamientos son: $a_1 b_2 c_3$, $a_2 b_1 c_3$, $a_0 b_1 c_0$, etc.
2. Únicamente con los números y con el orden se indica el factor. Así los tratamientos anteriores se escriben: 123, 213, 010.

Se recomienda comenzar la numeración de niveles en cero, aunque esto no significa que el valor real del factor sea cero en ese nivel. Para factores cuantitativos los niveles son números reales y el nivel cero es el menor. En estos casos conviene que los niveles sean igualmente espaciados, o sea que las diferencias entre niveles consecutivos sean constantes. Para factores cualitativos la asignación de niveles es arbitraria a las diferentes modalidades del factor.

Los efectos que se estudian en los diseños factoriales son: efectos principales e interacciones. Se denotan por letras mayúsculas; así A , B , C son efectos principales y AB , AC , ABC son interacciones.

Los efectos principales de un factor representan la variabilidad de un conjunto de p totales o la significancia de $p - 1$ contrastes ortogonales, si el número de niveles del factor es p , entre los p totales de unidades experimentales (UE) que tienen el factor a cada uno de los niveles. Estos totales se representan por:

$(A)_0, (A)_1, \dots, (A)_{p-1}$, así $(A)_i$ es el total de todas las UE que tienen el nivel i -ésimo del factor a , de manera que todas las UE se usan para definir cada efecto principal e interacción.

La interacción entre dos factores se presenta cuando los niveles de un factor no producen respuestas promedio que guarden las mismas relaciones al considerar cada uno de los niveles del segundo factor. Este concepto de interacción se ilustra en las siguientes gráficas:

RESPUESTA PROMEDIO DE
LOS TRATAMIENTOS

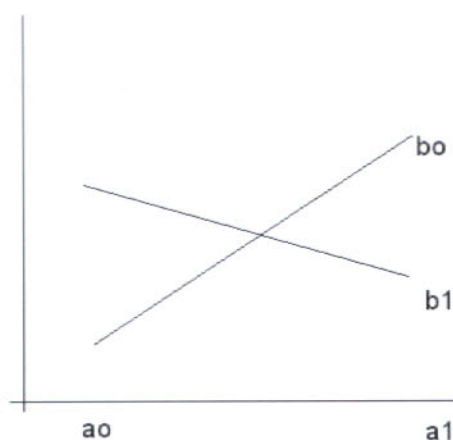


Figura 6.1. Gráfica de la interacción de dos factores dos niveles cada uno $2^2 = 4$.

RESPUESTA PROMEDIO
DE LOS TRATAMIENTOS

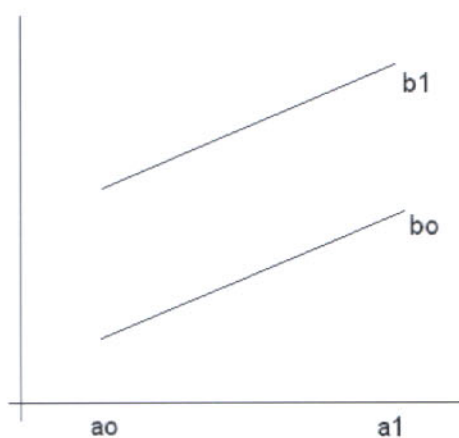


Figura 6.2. Gráfica que ilustra la no interacción de dos factores dos niveles cada uno $2^2 = 4$.

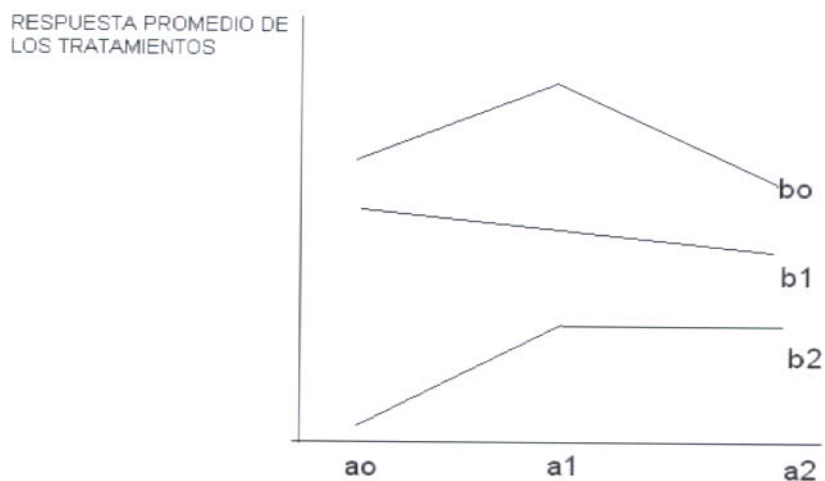


Figura 6.3. Gráfica de la interacción de dos factores a tres niveles cada uno $3^2 = 9$.

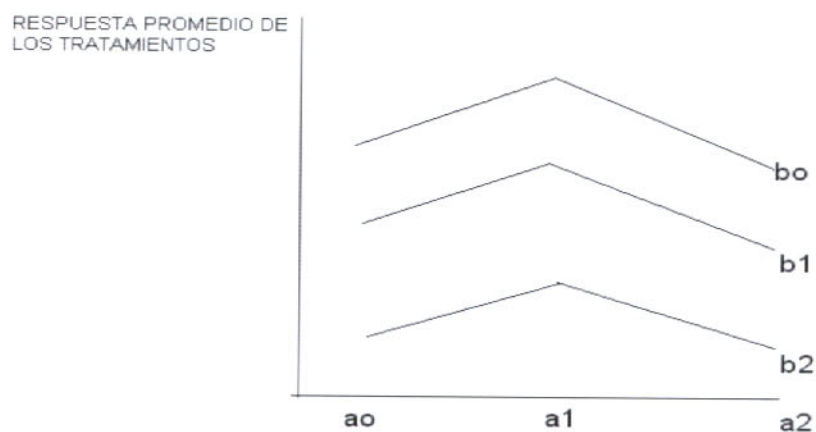


Figura 6.4. Gráfica que ilustra la no interacción de dos factores a tres niveles cada uno $3^2 = 9$.

Para definir la interacción entre tres factores se toma un patrón de interacción entre dos de ellos y, si ese patrón cambia al considerar los niveles de un tercer factor, se tiene interacción entre los tres factores.

Para estudiar una interacción primero debe probarse la hipótesis de no interacción, que se prueba con una razón de cuadrados medios. Si la hipótesis no se rechaza, se considera que no hay interacción. Si la hipótesis se rechaza mediante comparaciones múltiples, se debe investigar el patrón de la interacción. La gráfica con las medias de tratamientos da una idea de ese patrón, pero el patrón estará distorsionado por el error experimental.

6.3. Experimentos factoriales 2^n

En experimentos preliminares es frecuente que se incluyan algunos factores únicamente para ver si tienen alguna influencia sobre la variable dependiente; pero por el momento no interesa cómo es esa influencia. En estos casos lo más conveniente es usar dos niveles de cada factor y en caso de encontrar efectos significativos, se debe incluir un mayor número de niveles en experimentos posteriores para investigar con más detalle el fenómeno involucrado. Esto es válido para factores cuantitativos (los niveles expresables en números reales). Para factores cualitativos, los efectos dependen del tipo de factor, aunque en experimentos preliminares se pueden tomar los niveles o modalidades que a priori se consideren más diferentes en su efecto sobre la variable dependiente.

La selección de únicamente dos niveles puede conducir a inferencias erróneas. Así, cuando la respuesta se afecta en forma cuadrática, los dos niveles estudiados pueden indicar que no hay efecto del factor. Este es un riesgo que se corre al usar dos niveles por factor, sin embargo, en estudios exploratorios es raro que se tenga una situación como la de la Figura 6.5. Si todos los factores se estudian con dos niveles, se dice que es un experimento factorial 2^n , donde n es el número de factores. Estos factoriales tienen importancia por sí mismos y también porque algunos otros tipos de factoriales tienen relación con ellos.

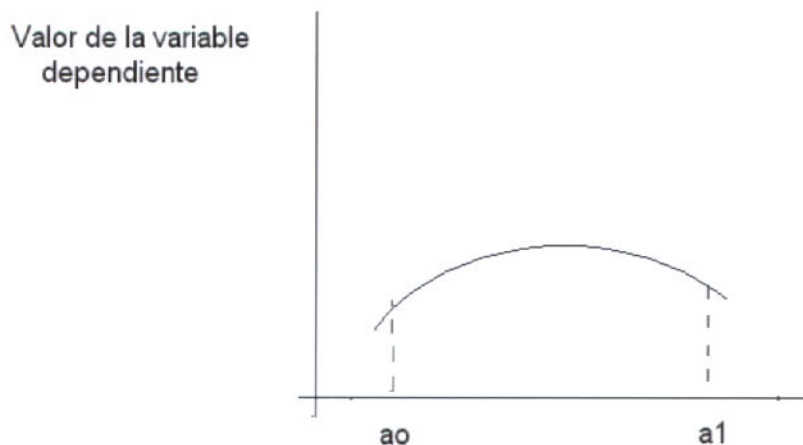


Figura 6.5. Respuesta cuadrática con dos niveles.

6.3.1 Experimentos factoriales 2^2

El factorial 2^2 es el caso más sencillo: se tienen cuatro tratamientos que se denotan por cualquiera de los tres tipos de símbolos.

Tabla 6.1. Tres tipos de símbolos para definir tratamientos factorial 2^2 .

	Tratamiento		Símbolos
1	(1)	a_0b_0	00
2	a	a_1b_0	10
3	b	a_0b_1	01
4	c	a_1b_1	11

Los efectos se definen con base en totales de tratamientos, los que se definen por:

$$(A)_{i=0} = T_{a_0b_0} + T_{a_0b_1} = 00 + 01$$

Donde $T_{a_0b_0}$ es el total de todas las UE que reciben el tratamiento a_0b_0 .

$$(A)_{i=1} = T_{a_1 b_0} + T_{a_1 b_1} = 10 + 11$$

Con $(A)_0$ y $(A)_1$ se define el efecto del factor a como:

$$(A) = (A)_1 - (A)_0$$

Para que esté en base unitaria y considerando que cada tratamiento se estudia en r UE se debe definir el efecto del factor por:

$$A = \frac{1}{2r}(10+11-00-01)$$

De manera semejante

$$(B)_{j=0} = T_{a_0 b_0} + T_{a_1 b_0} = 00 + 10$$

$$(B)_{j=1} = T_{a_0 b_1} + T_{a_1 b_1} = 01 + 11$$

$$(AB)_{i+j=0} = T_{a_0 b_0} + T_{a_1 b_1} = 00 + 11$$

$$(AB)_{i+j=1} = T_{a_0 b_1} + T_{a_1 b_0} = 01 + 10$$

Donde $i + j$ se toma en base a módulo 2 (el residuo de dividir $i + j$ entre 2). Los efectos son:

$$A = \frac{1}{2r}(10+11-00-01), \quad B = \frac{1}{2r}(01+11-00-10)$$

$$AB = \frac{1}{2r}[(AB)_0 - (AB)_1] = \frac{1}{2r}(00+11-01-10)$$

Nótese que $A = \frac{1}{2r} \left[\left(\begin{array}{c} \text{Tratamientos con} \\ \text{nivel 1 de } a \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Tratamientos con} \\ \text{nivel 0 de } a \end{array} \right) \right]$

Y que

$$AB = \{(b_1 - b_0) \text{ en presencia de } a_1\} - \{(b_1 - b_0) \text{ en presencia de } a_0\}$$

O sea es la diferencia del efecto de b al cambiar los niveles de a . También se puede ver que es la diferencia del efecto de a al cambiar los niveles de b .

Fisher y Yates usando la notación (1), a , b , ab para a_0b_0 , a_1b_0 , a_0b_1 y a_1b_1 , respectivamente, encontraron relaciones algebraicas para los efectos; así

$$A = \frac{1}{2r}(a-1)(b+1)$$

$$B = \frac{1}{2r}(a+1)(b-1)$$

$$AB = \frac{1}{2r}(a-1)(b-1)$$

Otra manera de estudiar los efectos es usando contrastes, así la tabla de coeficientes para estos contrastes es:

Tabla 6.2. Coeficientes para contrastes ortogonales en factorial 2^2 tratamientos.

	0 0	0 1	1 0	1 1
A	-1	-1	+1	+1
B	-1	+1	-1	+1
AB	+1	-1	-1	+1

De modo que la suma de cuadrados de los efectos se deduce de la siguiente manera:

Recuérdese que la suma de cuadrados de un contraste con base en las medias de tratamiento es:

$$\text{S.C de } \phi = \frac{n \times \phi^2}{\sum_{i=1}^t c_i^2} \quad \text{Donde } \phi = \sum_{i=1}^t c_i \bar{Y}_i.$$

La suma de cuadrados de un contraste en base a totales de tratamiento es:

$$\text{S.C de } \varphi = \frac{\phi^2}{n \sum_{i=1}^t c_i^2} \quad \text{Donde } \phi = \sum_{i=1}^t c_i Y_i.$$

De esta última ecuación se deduce la suma de cuadrados de los efectos con base en contrastes ortogonales.

$$SC_A = \frac{[(A)_1 - (A)_0]^2}{4r} = \frac{(T_{a_1 b_1} + T_{a_1 b_2} - T_{a_2 b_1} - T_{a_2 b_2})^2}{[1^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-1)^2]r}$$

$$SC_B = \frac{[(B)_1 - (B)_0]^2}{4r}, \quad SC_{AB} = \frac{[(AB)_0 - (AB)_1]^2}{4r}$$

Así, si el diseño experimental es completamente al azar con r repeticiones por tratamiento, el modelo de un experimento factorial 2^2 es:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

Donde: μ es el efecto medio verdadero ;

$\alpha_i, i = 1,2$ efecto verdadero del i ésimo nivel del factor a

$\beta_j, j = 1,2$ efecto verdadero del j ésimo nivel del factor b

$(\alpha\beta)_{ij}$ efecto verdadero de la interacción del i ésimo nivel del factor a y el j ésimo nivel del factor b

Tabla 6.3 Análisis de varianza para el diseño factorial 2^2 con r repeticiones por tratamiento.

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrados Medios	F_0	Esperanza del Cuadrado Medio
Trat	$4 - 1 = 3$	$r \sum_{i=1}^4 (\bar{Y}_i - \bar{Y}_{..})^2$	$\frac{\text{S.C. Trat}}{3}$	$\frac{\text{C.M. Trat.}}{\text{C.M. Error}}$	$\sigma^2 + \frac{\sum r(\tau_i - \tau)^2}{3}$
A	1	SC_A			
B	1	SC_B			
AB	1	SC_{AB}			
Error	$4(r-1)$	$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^r (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2$	$\frac{\text{S.C. Error}}{4(r-1)}$		σ^2
Total	$4r - 1$	$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^r (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2$			

Ejemplo 6.1. En un experimento de remolacha se estudiaron dos factores, estos fueron: nitrógeno a las dosis 60 kg/Ha y 80 kg / Ha y profundidad de labranza en invierno: 0.18 m y 0.28 m. Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

		Nitrogeno (factor a)			
		60		80	
Profundidad (Factor b)	0.18	2.59	2.78	2.0	1.80
		$T_{00} = 5.37$		$T_{10} = 3.8$	
	0.28	1.80	1.50	2.85	2.72
		$T_{01} = 3.3$		$T_{11} = 5.57$	

Cálculo de los efectos:

$$A = \frac{1}{4}(10 + 11 - 00 - 01) = \frac{1}{4}(3.8 + 5.57 - 5.37 - 3.3) = \frac{0.70}{4} = 0.175$$

$$B = \frac{1}{4}(01+11-00-10) = \frac{1}{4}(3.3+5.57-5.37-3.8) = \frac{-0.30}{4} = -0.075$$

$$AB = \frac{1}{4}(00+11-01-10) = \frac{1}{4}(5.37+5.57-3.3-3.8) = \frac{3.84}{4} = 0.96$$

Cálculo de sumas de cuadrados:

$$SC_A = \frac{[(A)_1 - (A)_0]^2}{4 \times 2} = \frac{(0.70)^2}{8} = 0.06125$$

$$SC_B = \frac{[(B)_1 - (B)_0]^2}{4 \times 2} = \frac{(-0.30)^2}{8} = 0.01125$$

$$SC_{AB} = \frac{[(AB)_0 - (AB)_1]^2}{4 \times 2} = \frac{(3.84)^2}{8} = 1.8432$$

$$SC_{ERROR} = SC_{TOT} - SC_{TRAT} = 2.0072 - 1.9157 = 0.0915$$

Tabla 6.4 Análisis de varianza para el diseño factorial 2^2 .

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrados Medios	F_0	Pr > F
Trat	3	1.9157	0.6386	27.9169	0.0038
A	1	0.06125	0.06125	2.6776	0.1771
B	1	0.01125	0.01125	0.4918	0.5218
AB	1	1.8432	1.84320	80.5770	0.0009
Error	4	0.0915	0.022875		
Total	7	2.0072			

El análisis de varianza indica que no hay efecto significativo de los factores a y b. Sin embargo, la interacción AB es altamente significativa ($P = 0.0009$). La interpretación de este hecho se presenta a continuación gráficamente. Las pendientes de las gráficas que muestran el efecto de los factores a y b, respectivamente, son pequeñas en términos relativos (Figura 6.6). En la Figura 6.7 se presenta la interacción entre ambos factores en

la que se puede apreciar que el efecto del factor a (fertilización nitrogenada) es diferente, según el nivel del factor b (profundidad de labranza). Así, en esta gráfica se aprecia que el efecto de la fertilización tiende a aumentar el rendimiento de la remolacha cuando la labranza de invierno se hace a 28 cm de profundidad. Sin embargo, el efecto de la fertilización tiende a disminuir el rendimiento si la labranza se hace a 18 cm de profundidad.

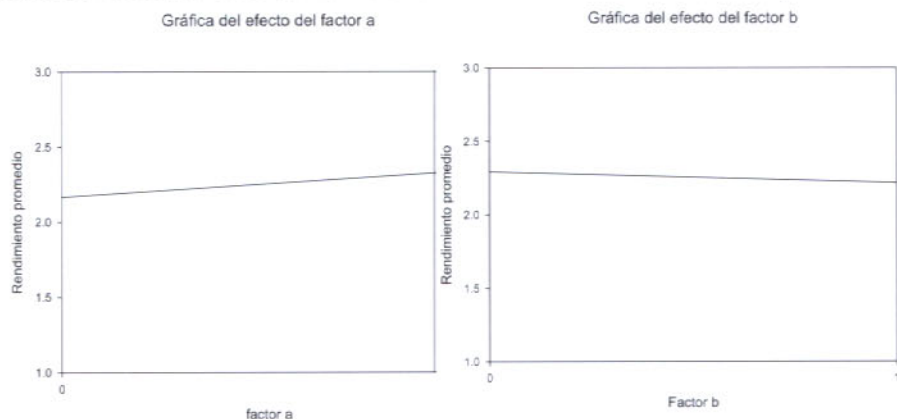


Figura 6.6. Gráficas que muestran los efectos de los factores a y b en el experimento factorial sobre remolacha.

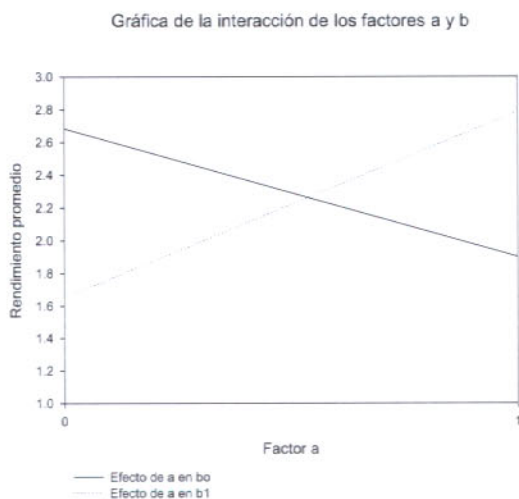


Figura 6.7. Gráfica de la interacción entre a y b en el experimento factorial sobre remolacha.

Para concluir este ejemplo se presenta un programa en SAS que realiza el análisis que se ha presentado.

```
DATA;
INPUT A B RESP;
CARDS;
0 0 2.59
0 0 2.78
0 1 1.8
0 1 1.5
1 0 2.0
1 0 1.8
1 1 2.85
1 1 2.72
PROC GLM; CLASS A B;
MODEL RESP = A B A*B;
RUN;
```

Procedimiento GLM

Variable dependiente: RESP

Fuente	DF	Suma de cuadrados	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
Modelo	3	1.91570000	0.63856667	27.92	0.0038
Error	4	0.09150000	0.02287500		
Total correcto	7	2.00720000			

R-cuadrado	0.954414	Coef Var	6.707088	Raiz MSE	0.151245	RESP Media	2.255000
------------	----------	----------	----------	----------	----------	------------	----------

Fuente	DF	Tipo I SS	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
A	1	0.06125000	0.06125000	2.68	0.1771
B	1	0.01125000	0.01125000	0.49	0.5218
A*B	1	1.84320000	1.84320000	80.58	0.0009

6.3.2 Experimentos factoriales 2^3

Si se tienen tres factores con dos niveles cada uno, los ocho tratamientos reciben las siguientes notaciones:

Tabla 6.5. Tres notaciones para los tratamientos de un experimento factorial 2^3 .

Tratamiento	Notación		
	I	II	III
1	(1)	$a_0 b_0 c_0$	000
2	a	$a_1 b_0 c_0$	100
3	b	$a_0 b_1 c_0$	010
4	c	$a_0 b_0 c_1$	001
5	ab	$a_1 b_1 c_0$	110
6	ac	$a_1 b_0 c_1$	101
7	bc	$a_0 b_1 c_1$	011
8	abc	$a_1 b_1 c_1$	111

La notación III se usa para representar los totales de los tratamientos. Los efectos principales e interacciones se definen con base en las siguientes sumas de totales de tratamiento (las sumas de índice son módulo 2).

Tabla 6.6. Efectos principales e interacciones en un factorial 2^3 .

$$\begin{aligned}
 (A)_{i=0} &= 000 + 010 + 001 + 011 \\
 (A)_{i=1} &= 100 + 110 + 101 + 111 \\
 (B)_{j=0} &= 000 + 100 + 001 + 101 \\
 (B)_{j=1} &= 010 + 110 + 011 + 111 \\
 (AB)_{i+j=0} &= 000 + 110 + 001 + 111 \\
 (AB)_{i+j=1} &= 100 + 010 + 101 + 011 \\
 (C)_{k=0} &= 000 + 100 + 010 + 110 \\
 (C)_{k=1} &= 001 + 101 + 011 + 111 \\
 (AC)_{i+k=0} &= 000 + 010 + 101 + 111 \\
 (AC)_{i+k=1} &= 100 + 110 + 001 + 011 \\
 (BC)_{j+k=0} &= 000 + 100 + 011 + 111 \\
 (BC)_{j+k=1} &= 010 + 110 + 001 + 101 \\
 (ABC)_{i+j+k=0} &= 000 + 110 + 101 + 011 \\
 (ABC)_{i+j+k=1} &= 100 + 010 + 001 + 111
 \end{aligned}$$

Los efectos principales e interacciones se pueden considerar como diferencias de promedios de tratamientos; así por ejemplo usando notación II para recalcar niveles de factores, el efecto del factor a es:

$$A = \frac{1}{4r} [(A)_1 - (A)_0]$$

Esto se puede descomponer como sigue:

$$\bar{y}_{a_1 b_0 c_0} - \bar{y}_{a_0 b_0 c_0} \quad \text{Efecto del factor } a \text{ a niveles } 0, 0 \text{ de } b \text{ y } c$$

$$\bar{y}_{a_1 b_0 c_1} - \bar{y}_{a_0 b_0 c_1} \quad \text{Efecto del factor } a \text{ a niveles } 0, 1 \text{ de } b \text{ y } c$$

$$\bar{y}_{a_1 b_1 c_0} - \bar{y}_{a_0 b_1 c_0} \quad \text{Efecto del factor } a \text{ a niveles } 1, 0 \text{ de } b \text{ y } c$$

$$\bar{y}_{a_1 b_1 c_1} - \bar{y}_{a_0 b_1 c_1} \quad \text{Efecto del factor } a \text{ a niveles } 1, 1 \text{ de } b \text{ y } c$$

Si se suman todas las observaciones de cada tratamiento y se divide entre r , se obtiene

$$\bar{y}_{a_1 b_0 c_1}, \text{ el promedio de tratamiento.}$$

El promedio de estas cuatro diferencias es el efecto a , encontrado antes. De modo similar los efectos de b y c son:

$$B = \frac{1}{4r} [(B)_1 - (B)_0], \quad C = \frac{1}{4r} [(C)_1 - (C)_0]$$

Para ejemplificar un efecto de interacción de dos factores, considérese AB.

$$a_1 b_1 c_0 - a_0 b_1 c_0 \quad \text{Efecto de } a \text{ al nivel } 1 \text{ de } b \text{ y } 0 \text{ de } c$$

$$a_1 b_1 c_1 - a_0 b_1 c_1 \quad \text{Efecto de } a \text{ al nivel } 1 \text{ de } b \text{ y } 1 \text{ de } c$$

$$\frac{1}{2} [(a_1 b_1 c_0 - a_0 b_1 c_0) + (a_1 b_1 c_1 - a_0 b_1 c_1)] \quad \text{Efecto de } a \text{ al nivel } 1 \text{ de } b$$

Expresión 6.1

De modo similar

$$\frac{1}{2} [(a_1 b_0 c_0 - a_0 b_0 c_0) + (a_1 b_0 c_1 - a_0 b_0 c_1)] \text{ Efecto de } a \text{ al nivel } 0 \text{ de } b$$

Expresión 6.2

De modo que la diferencia entre la expresión 6.1 y la expresión 6.2 mide la discrepancia del efecto de a al cambiar los niveles de b . A esto se le llama efecto de la interacción AB , y se divide entre dos para tener la misma base que los efectos principales. Así usando los totales (Tabla 6.6):

$$AB = \frac{1}{4r} [(AB)_0 - (AB)_1], \quad AC = \frac{1}{4r} [(AC)_0 - (AC)_1], \quad BC = \frac{1}{4r} [(BC)_0 - (BC)_1]$$

Siguiendo razonamientos similares para la interacción de tres factores se tiene:

$$\frac{1}{2} [(a_1 b_0 c_0 - a_0 b_0 c_0) + (a_1 b_0 c_1 - a_0 b_0 c_1)] \text{ Expresión 6.3}$$

Este es el efecto de interacción AC al nivel 0 de b

$$\frac{1}{2} [(a_1 b_1 c_0 - a_0 b_1 c_0) + (a_1 b_1 c_1 - a_0 b_1 c_1)] \text{ Expresión 6.4}$$

Este es el efecto de la interacción AC al nivel 1 de B .

De modo que la interacción de tres factores es:

$$\frac{1}{4r} [(ABC)_1 - (ABC)_0] = ABC$$

Esto resulta de la diferencia entre la expresión 6.4 menos la expresión 6.3 con un divisor apropiado.

En términos de contrastes ortogonales los efectos se definen con los coeficientes de la Tabla 6.7.

Tabla 6.7. Coeficientes para contrastes ortogonales en un factorial 2^3 .

Efecto	Tratamientos							
	000	100	010	110	001	101	011	111
Total	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
A	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1
B	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1
AB	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1
C	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1
AC	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1
BC	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1
ABC	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1

Ejemplo 6.9. Considérense los siguientes datos respecto a rendimientos de papa, obtenidos con varias combinaciones de fertilizantes (nitrógeno, fósforo y potasio).

NPK	Repetición 1	Repetición 2	Totales	Promedio de Tratamientos
0 0 0	34	50	84	42
1 1 0	42	52	94	47
0 1 1	56	75	131	65.5
1 0 0	39	56	95	47.5
1 1 1	65	81	146	73
0 0 1	55	48	103	51.5
1 0 1	45	83	128	64
0 1 0	54	64	118	59

Los efectos principales e interacciones se definen con base en las siguientes sumas de totales de tratamientos.

$$(N)_{i=0} = 000 + 010 + 001 + 011 = 84 + 118 + 103 + 131 = 436$$

$$(N)_{i=1} = 100 + 110 + 101 + 111 = 95 + 94 + 128 + 146 = 463$$

$$(P)_{j=0} = 000 + 100 + 001 + 101 = 84 + 95 + 103 + 128 = 410$$

$$(P)_{j=1} = 010 + 110 + 011 + 111 = 118 + 94 + 131 + 146 = 489$$

$$(NP)_{i+j=0} = 000 + 110 + 001 + 111 = 84 + 94 + 103 + 146 = 427$$

$$(NP)_{i+j=1} = 100 + 010 + 101 + 011 = 95 + 118 + 128 + 131 = 472$$

$$(K)_{k=0} = 000 + 100 + 010 + 110 = 84 + 95 + 118 + 94 = 391$$

$$(K)_{k=1} = 001 + 101 + 011 + 111 = 103 + 128 + 131 + 146 = 508$$

$$(NK)_{i+k=0} = 000 + 010 + 101 + 111 = 84 + 118 + 128 + 146 = 476$$

$$(NK)_{i+k=1} = 100 + 110 + 001 + 011 = 95 + 94 + 103 + 131 = 423$$

$$(PK)_{j+k=0} = 000 + 100 + 011 + 111 = 84 + 95 + 131 + 146 = 456$$

$$(PK)_{j+k=1} = 010 + 110 + 001 + 101 = 118 + 94 + 103 + 128 = 443$$

$$(NPK)_{i+j+k=0} = 000 + 110 + 101 + 011 = 84 + 94 + 128 + 131 = 437$$

$$(NPK)_{i+j+k=1} = 100 + 010 + 001 + 111 = 95 + 118 + 103 + 146 = 462$$

Cálculo de los efectos:

$$N = \frac{1}{4 \times 2} [(N)_1 - (N)_0] = \frac{1}{8} (463 - 436) = \frac{27}{8} = 3.375$$

$$P = \frac{1}{4 \times 2} [(P)_1 - (P)_0] = \frac{1}{8} (489 - 410) = \frac{79}{8} = 9.875$$

$$K = \frac{1}{4 \times 2} [(K)_1 - (K)_0] = \frac{1}{8} (508 - 391) = \frac{117}{8} = 14.625$$

$$NP = \frac{1}{4 \times 2} [(NP)_0 - (NP)_1] = \frac{1}{8} (427 - 472) = \frac{-45}{8} = -5.625$$

$$NK = \frac{1}{4 \times 2} [(NK)_0 - (NK)_1] = \frac{1}{8} (476 - 423) = \frac{53}{8} = 6.625$$

$$PK = \frac{1}{4 \times 2} [(PK)_0 - (PK)_1] = \frac{1}{8} (456 - 443) = \frac{13}{8} = 1.625$$

$$NPK = \frac{1}{4 \times 2} [(NPK)_1 - (NPK)_0] = \frac{1}{8} (462 - 437) = \frac{25}{8} = 3.125$$

Obtención de las sumas de cuadrados de los efectos principales e interacciones.

$$SC_N = \frac{[(N)_1 - (N)_0]^2}{8 \times 2} = \frac{(27)^2}{16} = 45.5625$$

$$SC_P = \frac{[(P)_1 - (P)_0]^2}{8 \times 2} = \frac{(79)^2}{16} = 390.0625$$

$$SC_K = \frac{[(K)_1 - (K)_0]^2}{8 \times 2} = \frac{(117)^2}{16} = 855.5625$$

$$SC_{NP} = \frac{[(NP)_0 - (NP)_1]^2}{8 \times 2} = \frac{(-45)^2}{16} = 126.5625$$

$$SC_{NK} = \frac{[(NK)_0 - (NK)_1]^2}{8 \times 2} = \frac{(53)^2}{16} = 175.5625$$

$$SC_{PK} = \frac{[(PK)_0 - (PK)_1]^2}{8 \times 2} = \frac{(13)^2}{16} = 10.5625$$

$$SC_{NPK} = \frac{[(NPK)_1 - (NPK)_0]^2}{8 \times 2} = \frac{(25)^2}{16} = 39.0625$$

$$\begin{aligned}
 SC_{\text{TRAT}} &= SC_N + SC_P + SC_K + SC_{NP} + SC_{NK} + SC_{PK} + SC_{NPK} \\
 &= 45.5625 + 390.0625 + 855.5625 + 126.5625 + 175.5625 + 10.5625 + 39.0625 = \\
 &1642.9375
 \end{aligned}$$

$$SC_{\text{TOT}} = \sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^2 (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = (34 - 56.1875)^2 + (42 - 56.1875)^2 + \dots + (64 - 56.1875)^2 = 3070.4375$$

$$SC_{\text{Error}} = SC_{\text{Tot}} - SC_{\text{Trat}} = 3070.4375 - 1642.9375 = 1427.500$$

Tabla 6.8 Análisis de varianza para el diseño factorial 2^3 .

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrados Medios	F_0	Pr > F
Trat	7	1642.9375	234.7054	1.32	0.3522
N	1	45.5625	45.5625	0.26	NS
P	1	390.0625	390.0625	2.19	0.1775
K	1	855.5625	855.5625	4.79	0.0599
NP	1	126.5625	126.5625	0.71	NS
NK	1	175.5625	175.5625	0.98	NS
PK	1	10.5625	10.5625	0.06	NS
NPK	1	39.0625	39.0625	0.22	NS
Error	8	427.5000	178.4375		
Total	15	3070.4375			

El análisis de varianza indica que solo el potasio K tiene efecto significativo ($P \geq 0.06$) sobre el rendimiento de papa. Este efecto se presenta gráficamente en la Figura 6.8.

Gráfica del efecto del potasio en el rendimiento de papa

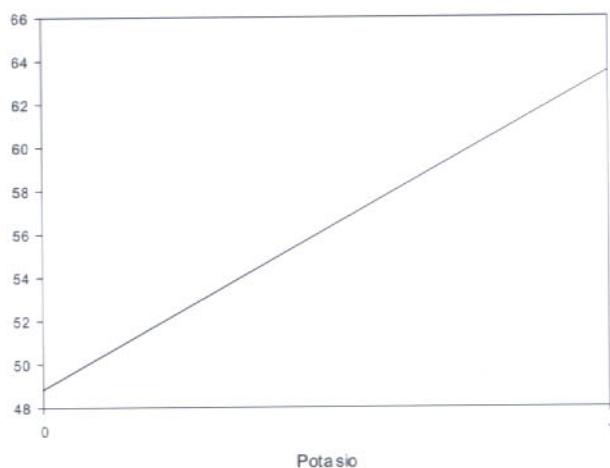


Figura 6.8. Gráfica que muestra el efecto del potasio en el rendimiento de papa.

A continuación el programa en SAS que produce el análisis.

```
DATA FAC2XX3;
INPUT N P K REN;
CARDS;
0 0 0 34
0 0 0 50
1 1 0 42
1 1 0 52
0 1 1 56
0 1 1 75
1 0 0 39
1 0 0 56
1 1 1 65
1 1 1 81
0 0 1 55
0 0 1 48
1 0 1 45
1 0 1 83
0 1 0 54
0 1 0 64
;
```

```

PROC GLM; CLASS N P K; MODEL REN = N P K N*P N*K P*K N*P*K;
ESTIMATE 'EFECTO K' K -1 1;
RUN;

```

Procedimiento GLM

Variable dependiente: REN

Fuente	DF	Suma de cuadrados	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
Modelo	7	1642.937500	234.705357	1.32	0.3522
Error	8	1427.500000	178.437500		
Total correcto	15	3070.437500			

R-cuadrado	Coef Var	Raiz MSE	REN Media
0.535083	23.77406	13.35805	56.18750

Fuente	DF	Tipo I SS	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
N	1	45.5625000	45.5625000	0.26	0.6270
P	1	390.0625000	390.0625000	2.19	0.1775
K	1	855.5625000	855.5625000	4.79	0.0599
N*P	1	126.5625000	126.5625000	0.71	0.4241
N*K	1	175.5625000	175.5625000	0.98	0.3503
P*K	1	10.5625000	10.5625000	0.06	0.8139
N*P*K	1	39.0625000	39.0625000	0.22	0.6524

Parámetro	Estimación	Error estándar	Valor t	Pr > t
EFECTO K	14.6250000	6.67902500	2.19	0.0599

6.3.3. Experimentos Factoriales 2^n

Extendiendo las ideas de los factoriales 2^2 y 2^3 , para el caso general, se tiene que cada efecto principal o interacción se representa por la diferencia entre dos totales. Así, si los tratamientos son $a_i b_j c_k \dots z_l$

$$A = \frac{1}{2^{n-1} \times r} [(A)_{i=1} - (A)_{i=0}]$$

Donde $(A)_{i=0}$ denota el total de todos los tratamientos con el nivel cero del factor a (esto es $i = 0$).

$(A)_{i=1}$ Es el total de tratamientos con nivel 1 de a ($i = 1$).

Se asume que cada tratamiento se observa en r UE. Así, el número total de UE es $2^n \times r$.

De manera semejante se definen los otros $n - 1$ efectos principales.

Para todas las C_2^n interacciones de dos factores se hace algo semejante a la AB y CZ que se ejemplifican aquí.

$$AB = \frac{1}{2^{n-1} \times r} [(AB)_{i+j=0} - (AB)_{i+j=1}]$$

$$CZ = \frac{1}{2^{n-1} \times r} [(CZ)_{k+l=0} - (CZ)_{k+l=1}]$$

Donde $(AB)_{i+j=0}$ es el total de tratamientos donde $i + j = 0$ módulo 2, esto es, de tratamientos con niveles 0,0 de A y B y con niveles 1, 1 de A y B. similarmente $(CZ)_{k+l=1}$ es el total de todos los tratamientos que tengan c_1z_0 ó c_0z_1 esto es con $k + l = 1$ módulo 2.

Para las C_3^n interacciones de tres factores los efectos son semejantes a la ACZ que es:

$$ACZ = \frac{1}{2^{n-1} \times r} [(ACZ)_{i+k+l=1} - (ACZ)_{i+k+l=0}]$$

Para las C_4^n interacciones de cuatro factores los efectos son semejantes a la ABCZ que es:

$$ABCZ = \frac{1}{2^{n-1} \times r} [(ABCZ)_{i+j+k+l=0} - (ABCZ)_{i+j+k+l=1}]$$

Donde $(ABCZ)_0$ es el total de tratamientos que tienen $i+j+k+l=0$ módulo 2. Así entran a este total todos los tratamientos con: $a_0b_0c_0\dots z_0$, $a_1b_1c_0\dots z_0$, $a_0b_0c_1\dots z_1$, $a_0b_1c_1\dots z_0$, $a_0b_1c_0\dots z_1$, $a_1b_0c_1\dots z_0$, $a_1b_0c_0\dots z_1$ y $a_1b_1c_1\dots z_1$.

Las diferencias se van alternando de signo; así, si el número de factores es impar se obtiene $()_1 - ()_0$. Si el número de factores es par se tiene $()_0 - ()_1$.

Para obtener las sumas de cuadrados debidas a cada uno de los efectos, el procedimiento más rápido es el de contrastes. Como cada tratamiento en el contraste recibe un 1 ó (-1), la suma de coeficientes al cuadrado es en todos los casos 2^n , así algunos ejemplos son:

$$SC_A = \frac{[(A)_1 - (A)_0]^2}{2^n \times r}, \quad SC_{AB} = \frac{[(AB)_0 - (AB)_1]^2}{2^n \times r},$$

$$SC_{ACZ} = \frac{[(ACZ)_1 - (ACZ)_0]^2}{2^n \times r}, \quad SC_{ABCZ} = \frac{[(ABCZ)_0 - (ABCZ)_1]^2}{2^n \times r},$$

En la tabla del análisis de varianza, la suma de cuadrados de tratamientos con $2^n - 1$ gl se descompone en otras tantas partes atribuibles a los diferentes efectos de factores. Esta descomposición es independiente del diseño experimental. En un diseño completamente al azar con r repeticiones por tratamiento, el esquema de la tabla del análisis de varianza es el siguiente:

Tabla 6.9 Análisis de varianza para el diseño factorial 2^n completamente al azar.

Fuente de Variación Tratamientos	Grados de Libertad $2^n - 1$	Suma de Cuadrados
A	1	
B	1	
Efectos Principales C	1	
⋮	⋮ (n veces)	⋮
Z	1	
		⋮
AB	1	
AC	1	
		⋮
Interacciones 2 ⋮	⋮ C_2^n veces	
Factores	1	
		⋮
	1	
Interacciones n - 1	1	
Factores	1	
	⋮	
		⋮
Interacción		
ABC...Z	1	
Error	$2^n(r - 1)$	
Total	$2^n \times r - 1$	

Todos los efectos se prueban con el cuadrado medio del error ya que asume el caso más frecuente en el que todos los efectos son hijos.

6.4. Factoriales 3^n

Cuando los niveles de un factor a son tres, el efecto de ese factor estará reflejado en la variabilidad de tres totales de tratamientos, $(A)_0, (A)_1, (A)_2$. Donde $(A)_i$ representa el

total obtenido al sumar todos los tratamientos con nivel i del factor a . También, el efecto del factor a se puede estudiar con dos contrastes ortogonales entre esos tres totales. Así, el efecto principal de un factor con tres niveles se asocia con dos grados de libertad.

Una manera de asignar esos dos contrastes, útil para el caso de factores cuantitativos, es la que asigna el efecto lineal y cuadrático de ese factor a los contrastes.

La diferencia entre tratamientos con μ_{a_1} menos tratamientos con μ_{a_0} es el incremento debido al aumento de nivel de 0 a 1.

Similarmente $\mu_{a_2} - \mu_{a_1}$ es el incremento al cambiar del nivel 1 al 2. Las μ_{a_i} se estiman con \bar{y}_{a_i} .

El efecto lineal es el promedio de incrementos de \bar{y}_{a_0} a \bar{y}_{a_1} y de \bar{y}_{a_1} a \bar{y}_{a_2} ; así

$$A_L = \text{efecto lineal de } a = \frac{1}{2}[(a_1 - a_0) + (a_2 - a_1)] = \frac{1}{2}[a_2 - a_0]$$

El efecto cuadrático o desviaciones de la linealidad es la diferencia de incrementos. Si la linealidad es perfecta esa diferencia será cero y si hay discrepancias se debe a la curvatura (como sólo son tres puntos, se considera una curvatura de tipo cuadrático).

$$A_C = \frac{1}{2}[(a_2 - a_1) - (a_1 - a_0)] = \frac{1}{2}(a_2 - 2a_1 + a_0).$$

6.4.1. Experimentos factoriales 3^2

Cuando se tiene a dos factores, caso del factorial 3^2 , los efectos principales se evalúan cambiando los denominadores como se ilustra en el ejemplo 6.10; aquí se presenta la interacción entre esos dos factores. Si ambos factores son cuantitativos, puede resultar interesante el estudio de la interacción en términos de los efectos cuadráticos y lineales; esto es, investigando cómo cambia el efecto lineal de un factor al cambiar los niveles del otro y similarmente para el efecto cuadrático. Esto es fácil efectuarlo usando contrastes.

Los coeficientes para los contrastes de la interacción se obtienen mediante el producto

de los coeficientes correspondientes a efectos principales. Esto se especifica en la Tabla 6.10.

Tabla 6.10. Coeficientes para contrastes en un factorial 3^2 , con ambos factores cuantitativos.

Efecto Global individual	Tratamiento									
	a_0b_0	a_0b_1	a_0b_2	a_1b_0	a_1b_1	a_0b_0	a_0b_0	a_2b_1	a_2b_2	
A	A_L	-1	-1	-1	0	0	0	1	1	1
	A_C	1	1	1	-2	-2	-2	1	1	1
B	B_L	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1
	B_C	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1
AB	A_LB_L	1	0	-1	0	0	0	-1	0	1
	A_LB_C	-1	2	-1	0	0	0	1	-2	1
	A_CB_L	-1	0	1	2	0	-2	-1	0	1
	A_CB_C	1	-2	1	-2	4	-2	1	-2	1

La interpretación de los términos de interacción es sobre la forma de cambio de un efecto principal al cambiar los niveles del otro. Por ejemplo, si A_LB_L es significativo, indica que el efecto lineal de a cambia linealmente al cambiar los niveles de b . Un esquema de este patrón de respuesta se ilustra en la Figura 6.9.

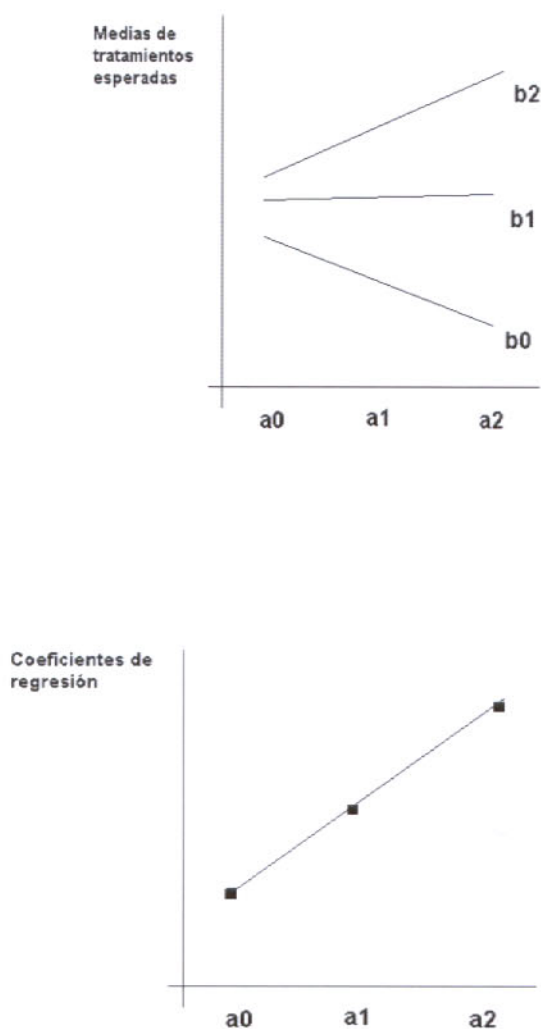


Figura 6.9. Respuesta con interacción lineal x lineal.

De modo semejante un efecto $A_L B_C$ significativo indica que el efecto lineal de a cambia en forma cuadrática al cambiar los niveles de b . Esto se ilustra en la Figura 6.10.

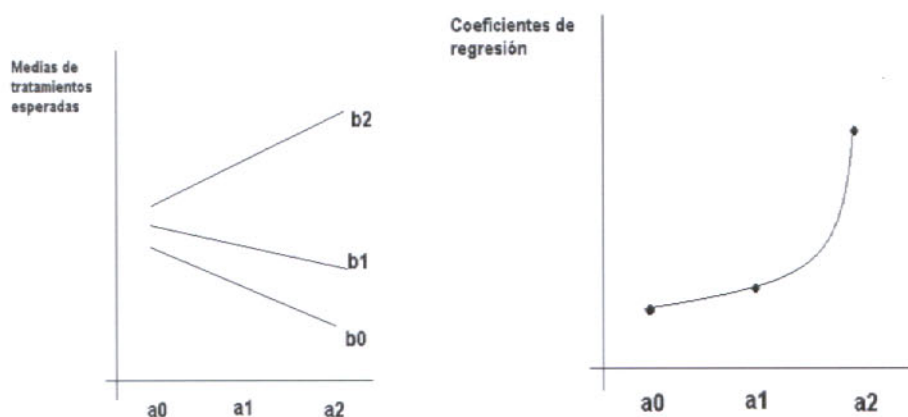


Figura 6.10. Respuesta con interacción lineal x cuadrática.

Un posible esquema para representar $A_C B_C$ se presenta en la Figura 6.11 en forma aproximada.

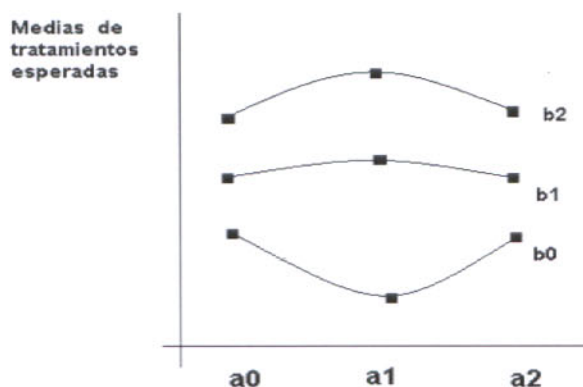


Figura 6.11. Respuesta con interacción cuadrática x cuadrática.

Ejemplo 6.10. Factorial 3^2 . La práctica de irrigación en la actividad agrícola produce que se formen depósitos de sal en el suelo que al paso del tiempo impide el desarrollo de las plantas.

Un Ingeniero Agrónomo planteó la hipótesis de que la exposición de las plantas a elevadas concentraciones de sales en el suelo inhibe el consumo de agua y nutrientes de la planta, lo que impide su crecimiento y desarrollo. Se llevó a cabo un experimento con plantas de cebada para medir el efecto del aumento de la salinidad en la cantidad de agua consumida por las plantas. La unidad experimental consistió de 20 plantas de cebada. Se usó un arreglo factorial con salinidad del suelo y edad de la planta en días como los dos factores cuantitativos. Las plantas se cultivaron en soluciones nutritivas con 3 niveles de salinidad que, expresados como unidades de presión osmótica, fueron: 0, 6 y 12 barios y se cosecharon a la edad de: 14, 21 y 28 días. Dos repeticiones de cada una de las nueve combinaciones de tratamiento, de salinidad con edad, se ensayaron en una cámara de cultivo en un arreglo completamente al azar.

La variable medida fue la cantidad de agua consumida por las plantas durante el experimento, expresada en milímetros de agua por cada 100 g de peso de la planta seca. Los datos se muestran en la Tabla 6.11.

Tabla 6.11. Agua consumida (ml/100g) por planta de cebada a los 14, 21 28 días de edad, en soluciones con niveles de presión osmótica de 0, 6 y 12 barios

Salinidad (S)	0 barios			6 barios			12 barios		
Edad (E)	14	21	28	14	21	28	14	21	28
	2.2	5.0	13.2	3.7	5.9	9.4	2.8	4.5	7.6
	3.3	5.7	12.4	4.5	7.2	11.0	3.4	5.9	8.3
Medias	2.75	5.35	12.8	4.1	6.55	10.2	3.1	5.2	7.95
Total	5.5	10.7	25.6	8.2	13.1	20.4	6.2	10.4	15.9

Para obtener el análisis de varianza apropiado, es necesario calcular las sumas de cuadrados para cada efecto individual. La Tabla 6.10 de coeficientes para el factorial 3^2 se reproduce a continuación.

Efecto Global individual	Tratamiento									
	s_0e_0	s_0e_1	s_0e_2	s_1e_0	s_1e_1	s_1e_2	s_2e_0	s_2e_1	s_2e_2	
S	S_L	-1	-1	-1	0	0	0	1	1	1
	S_C	1	1	1	-2	-2	-2	1	1	1
E	E_L	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1
	E_C	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1
SE	S_LE_L	1	0	-1	0	0	0	-1	0	1
	S_LE_C	-1	2	-1	0	0	0	1	-2	1
	S_CE_L	-1	0	1	2	0	-2	-1	0	1
	S_CE_C	1	-2	1	-2	4	-2	1	-2	1

Cálculo de los efectos lineal y cuadrático del factor salinidad utilizando los promedios.

$$S_L = \left[\frac{-00 - 01 - 02 + 20 + 21 + 22}{6} \right] = \left[\frac{-2.75 - 5.35 - 12.8 + 3.1 + 5.2 + 7.95}{6} \right] = -0.775$$

$$S_C = \left[\frac{00 + 01 + 02 - 2(10) - 2(11) - 2(12) + (20) + (21) + (22)}{18} \right]$$

$$= \left[\frac{2.75 + 5.35 + 12.8 - 2(4.1) - 2(6.55) - 2(10.2) + 3.1 + 5.2 + 7.95}{18} \right] = \frac{-4.55}{18} = -0.253$$

Cálculo de los efectos lineal y cuadrático del factor edad utilizando los promedios.

$$E_L = \left[\frac{-00+02-10+12-20+22}{6} \right] = \left[\frac{-275+128-41+102-31+7.95}{6} \right] = \frac{21}{6} = 3.5$$

$$E_C = \left[\frac{00-2(01)+02+10-2(11)+12+20-2(21)+22}{18} \right]$$

$$= \left[\frac{2.75-2(5.35)+12.8+4.1-2(6.55)+10.2+3.1-2(5.2)+7.95}{18} \right] = \frac{6.7}{18} = 0.372$$

Cálculo de suma de cuadrados para efectos individuales. Se usan totales.

$$SC_{E_L} = \frac{[(02)+(12)+(22)-(00)-(10)-(20)]^2}{2 \times 6} = \frac{[25.6+20.4+15.9-5.5-8.2-6.2]^2}{12}$$

$$= \frac{42^2}{12} = 147$$

$$SC_{E_C} = \frac{[(00)+(02)+(10)+(12)+(20)+(22)-2(01)-2(11)-2(21)]^2}{2 \times 18}$$

$$= \frac{[5.5+25.6+8.2+20.4+6.2+15.9-2 \times 10.7-2 \times 13.1-2 \times 10.4]^2}{36} = \frac{13.4^2}{36} = 4.9878$$

$$SC_{E_s} = \frac{[(20)+(21)+(22)-(00)-(01)-(02)]^2}{2 \times 6} = \frac{[6.2+10.4+15.9-5.5-10.7-25.6]^2}{12}$$

$$\frac{(-9.3)^2}{12} = 7.2075$$

$$SC_{E_{s_c}} = \frac{[(00)+(01)+(02)+(20)+(21)+(22)-2(10)-2(11)-2(12)]^2}{2 \times 18}$$

$$= \frac{[5.5+10.7+25.6+6.2+10.4+15.9-2 \times 8.2-2 \times 13.1-2 \times 20.4]^2}{36} = \frac{(-9.1)^2}{36} = 2.3003$$

Las sumas de cuadrados restantes se dejan como ejercicio para el lector. El siguiente programa en SAS obtiene toda la tabla del análisis de varianza

```
DATA CEBADA;
INPUT EDAD SAL H2O;
CARDS;
14 0 2.2
14 0 3.3
21 0 5.0
21 0 5.7
28 0 13.2
28 0 12.4
14 6 3.7
14 6 4.5
21 6 5.9
21 6 7.2
28 6 9.4
28 6 11.0
14 12 2.8
14 12 3.4
21 12 4.5
21 12 5.9
28 12 7.6
28 12 8.3
;
PROC GLM; CLASS EDAD SAL;
MODEL H2O = EDAD SAL EDAD*SAL;
CONTRAST'EDAD(L)' EDAD -1 0 1;
CONTRAST'EDAD(C)' EDAD 1 -2 1;
CONTRAST'SAL(L)' SAL -1 0 1;
CONTRAST'SAL(C)' SAL 1 -2 1;
CONTRAST'EDAD(L)SAL(L)' EDAD*SAL 1 0 -1 0 0 0 -1 0 1;
CONTRAST'EDAD(L)SAL(C)' EDAD*SAL -1 2 -1 0 0 0 1 -2 1;
CONTRAST'EDAD(C)SAL(L)' EDAD*SAL -1 0 1 2 0 -2 -1 0 1;
CONTRAST'EDAD(C)SAL(C)' EDAD*SAL 1 -2 1 -2 4 -2 1 -2 1;
RUN;
```

Procedimiento GLM

Variable dependiente: H2O

Fuente	DF	Suma de cuadrados	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
Modelo	8	179.7044444	22.4630556	40.27	<.0001
Error	9	5.0200000	0.5577778		
Total correcto	17	184.7244444			

R-cuadrado	Coef Var	Raiz MSE	H2O Media
0.972824	11.58898	0.746845	6.444444

Fuente	DF	Tipo I SS	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
EDAD	2	151.9877778	75.9938889	136.24	<.0001
SAL	2	9.5077778	4.7538889	8.52	0.0084
EDAD*SAL	4	18.2088889	4.5522222	8.16	0.0046

Contraste	DF	Contraste SS	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
EDAD(L)	1	147.0000000	147.0000000	263.55	<.0001
EDAD(C)	1	4.9877778	4.9877778	8.94	0.0152
SAL(L)	1	7.2075000	7.2075000	12.92	0.0058
SAL(C)	1	2.3002778	2.3002778	4.12	0.0728
EDAD(L)SAL(L)	1	13.5200000	13.5200000	24.24	0.0008
EDAD(L)SAL(C)	1	1.2150000	1.2150000	2.18	0.1741
EDAD(C)SAL(L)	1	2.9400000	2.9400000	5.27	0.0473
EDAD(C)SAL(C)	1	0.5338889	0.5338889	0.96	0.3535

Interpretación del análisis de varianza.

Los efectos de los factores: edad y salinidad son altamente significativos. Los contrastes que definen los efectos individuales de edad (lineal y cuadrático) son significativos. El efecto lineal de salinidad también es significativo, pero no su efecto cuadrático ($P=0.0728$).

La interacción entre los factores edad y salinidad es también altamente significativa. Los contrastes que definen efectos individuales de la interacción indican la no significancia de las interacciones donde interviene el efecto cuadrático del factor salinidad. La Figura 6.12

muestra la respuesta del consumo de agua de acuerdo al nivel de salinidad para cada nivel del factor edad de la planta. Se puede apreciar que la salinidad no tiene efecto sobre el consumo de agua de las plantas durante las primeras tres semanas (hasta el día 21). Sin embargo, al final de las cuatro semanas (el día 28), el consumo de agua decreció al aumentar la salinidad en el medio. La interacción significativa entre los efectos salinidad (lineal) y edad (cuadrática) ($P=0.0473$); indica que la respuesta lineal a la salinidad cambia de manera cuadrática con los días.

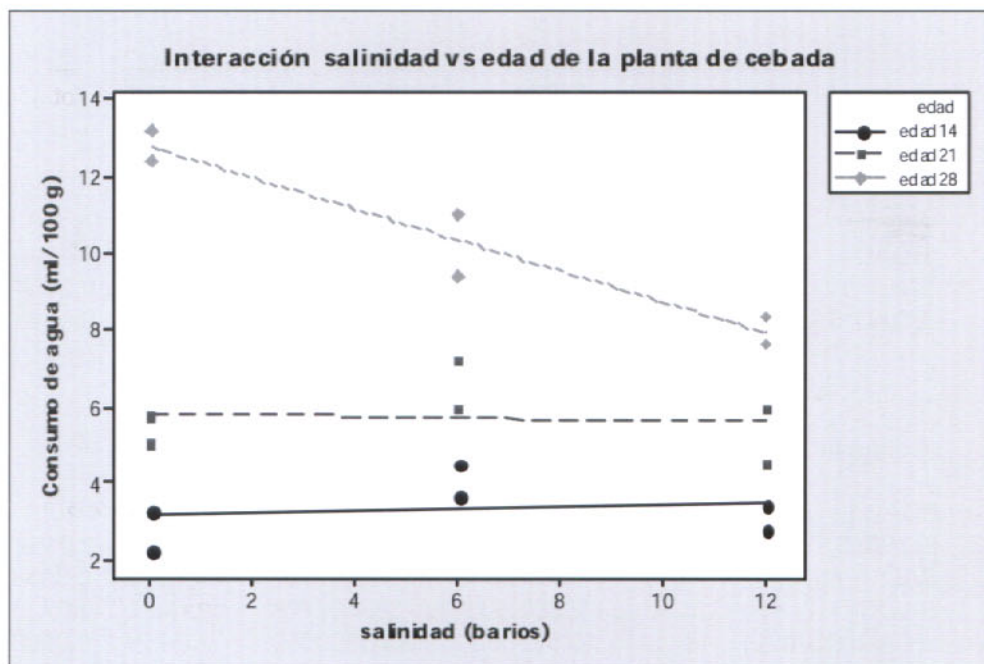


Figura 6.12. Agua consumida por plantas de cebada con tres niveles de salinidad en 14, 21 y 28 días.

Ejemplo 6.11. Como un segundo ejemplo, en la Tabla 6.12 se presentan los totales de tratamientos de un experimento con 3 niveles de fertilizante a base de nitrógeno y 3 niveles de fertilizante a base de fósforo. Los datos son los números de plantas de lechuga que emergieron del suelo. No se proporcionan los conteos de cada una de las 12 parcelas de cada tratamiento, pero el cuadrado medio del error de este experimento es aproximadamente 59.

Tabla 6.12. Número de plantas de lechuga que emergieron.

	n_0	n_1	n_2	Totales
P_0	449	413	326	1188
P_1	409	358	291	1058
P_2	341	278	312	931
Totales	1199	1049	929	3177

Cálculo de los efectos lineal y cuadrático del factor nitrógeno con base en los totales.

Atendiendo a los coeficientes de los contrastes de la Tabla 6.10 se tiene:

$$N_L = \left[\frac{-00 - 01 - 02 + 20 + 21 + 22}{12 \times 6} \right] = \frac{-449 - 409 - 341 + 326 + 291 + 312}{72} = \frac{-270}{72} = -3.75$$

$$N_C = \left[\frac{00 + 01 + 02 - 2(10) - 2(11) - 2(12) + 20 + 21 + 22}{12 \times 18} \right]$$

$$= \frac{449 + 409 + 341 - 2 \times 413 - 2 \times 358 - 2 \times 278 + 326 + 291 + 312}{216} = \frac{30}{216} = 0.1389$$

Cálculo de los efectos lineal y cuadrático del factor fósforo en base a los totales

$$P_L = \left[\frac{-00 + 02 - 10 + 12 - 20 + 22}{12 \times 6} \right] = \frac{-449 + 341 - 413 + 278 - 326 + 312}{72} = \frac{-257}{72} = -3.57$$

$$P_C = \left[\frac{00 - 2(01) + 02 + 10 - 2(11) + 12 + 20 - 2(21) + 22}{12 \times 18} \right]$$

$$= \frac{449 - 2 \times 409 + 341 + 413 - 2 \times 358 + 278 + 326 - 2 \times 291 + 312}{216} = \frac{3}{216} = 0.0124$$

Cálculo de los efectos individuales de la interacción $N \times P$

$$N_L \times P_L = \left[\frac{00 - 02 - 20 + 22}{12 \times 4} \right] = \frac{449 - 341 - 326 + 312}{48} = \frac{94}{48} = 1.9583$$

$$N_L \times P_C = \left[\frac{-00 + 2(01) - 02 + 20 - 2(21) + 22}{12 \times 12} \right] = \frac{-449 + 2 \times 409 - 341 + 326 - 2 \times 291 + 312}{144} = \frac{84}{144} = 0.5833$$

$$N_C \times P_L = \left[\frac{-00 + 02 + 2(10) - 2(12) - 20 + 22}{12 \times 12} \right] = \frac{-449 + 341 + 2 \times 413 - 2 \times 278 - 326 + 312}{144} = \frac{148}{144} = 1.0278$$

$$N_C \times P_C = \left[\frac{00 - 2(01) + 02 - 2(10) + 4(11) - 2(12) + 20 - 2(21) + 22}{12 \times 36} \right]$$

$$= \frac{449 - 2 \times 409 + 341 - 2 \times 413 + 4 \times 358 - 2 \times 278 + 326 - 2 \times 291 + 312}{432} = \frac{78}{432} = 0.1806$$

Cálculo de la suma de cuadrados para los efectos individuales.

$$SC_{N_L} = \frac{[-00 - 01 - 02 + 20 + 21 + 22]^2}{12 \times 6} = \frac{[-270]^2}{72} = 1012.5$$

$$SC_{N_C} = \frac{[00 + 01 + 02 - 2(10) - 2(11) - 2(12) + 20 + 21 + 22]^2}{12 \times 18} = \frac{[30]^2}{216} = 4.1667$$

$$SC_{P_L} = \frac{[-00 + 02 - 10 + 12 - 20 + 22]^2}{12 \times 6} = \frac{[-257]^2}{72} = 917.3422$$

$$SC_{P_C} = \frac{[00 - 2(01) + 02 + 10 - 2(11) + 12 + 20 - 2(21) + 22]^2}{12 \times 18} = \frac{3^2}{216} = 0.0417$$

Cálculo de la suma de cuadrados para los efectos individuales que componen la interacción $N \times P$.

$$SC_{N_L \times P_L} = \frac{[00 - 02 - 20 + 22]^2}{12 \times 4} = \frac{94^2}{48} = 184.0833$$

$$SC_{N_L \times P_C} = \frac{[-00 + 2(01) - 02 + 20 - 2(21) + 22]^2}{12 \times 12} = \frac{84^2}{144} = 49$$

Tabla 6.13. Análisis de varianza del experimento de lechuga.

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrado Medio	F_{cal}	$F^1_{99,0.05}$	$F^1_{99,0.10}$
N_L	1	1012.5000	1012.5000	17.16	3.91	2.76
N_C	1	4.1667	4.1667	0.07		
P_L	1	917.3422	917.3422	15.55		
P_C	1	0.0417	0.0417	0.00		
$N_L \times P_L$	1	184.0833	184.0833	3.12		
$N_L \times P_C$	1	49.0000	49.0000	0.83		
$N_C \times P_L$	1	152.1111	152.1111	2.58		
$N_C \times P_C$	1	14.0833	14.0833	0.24		
Error	99	5841.0000	59.0000			
Total	100					

Interpretación: Tanto el nitrógeno como el fósforo parecen haber tenido un efecto contrario al esperado en la emergencia de las plantas de lechuga. (el subíndice 2 indica la mayor aplicación). Ambos efectos principales, N y P comprenden dos comparaciones independientes y, por lo tanto, tienen 2 grados de libertad cada uno. Los efectos lineales de ambos fertilizantes son significativos no así los cuadráticos. En cuanto al análisis de la interacción, solo el efecto de $N_L \times P_L$ es significativo a un nivel del 10 por ciento, pero no al del 5 por ciento.

6.5. Factoriales mixtos $p \times q \times r \times \dots$

Es frecuente que no todos los factores que se estudian tengan el mismo número de niveles, en este caso estamos ante un factorial mixto. El análisis de este tipo de factoriales se hace planteando el modelo de diseño experimental y de tratamientos en uno solo y se aplican las reglas vistas en el capítulo uno sección 1.10 en la cual se explica la construcción de la tabla de análisis de varianza en diseños completos balanceados.

Ejemplo 6.12. (Factorial $2 \times 2 \times 3$). Cierta especie de camarón desova en el mar y los huevos se transforman en larva mientras son transportados a la costa. Pasada la etapa larvaria entran en los estuarios, donde crecen con rapidez y se convierten en pre-adultos que emigran de nuevo al mar para alcanzar ahí su madurez sexual. Como resultado de sus migraciones, el camarón encuentra una amplia variación de la temperatura y salinidad durante su ciclo de vida, por lo que es de gran importancia conocer cómo afectan su crecimiento para entender la influencia de la temperatura y la salinidad del agua, así

como la densidad de población sobre la tasa de crecimiento de los camarones cultivados en acuarios y si estos factores actúan independientes sobre la población.

Se usó un diseño de tratamientos factorial de tres factores: temperatura (25°C y 35°C); salinidad del agua (10%, 25% y 40%); y densidad de camarones en el acuario (80 camarones /40 litros, 160 camarones/40 litros). Se consideró que los niveles investigados tenían las mayores probabilidades de mostrar efectos sobre el crecimiento de los camarones.

El diseño experimental consistió en tres acuarios idénticos para cada una de las doce combinaciones de tratamientos del factorial $2 \times 2 \times 3$. Cada combinación se asignó al azar en tres acuarios en un diseño completamente al azar. Al principio del experimento se colocaron camarones en etapa postlarvaria en los 36 acuarios. En la Tabla 6.14 se muestra el aumento de peso en g por camarón en cuatro semanas.

Tabla 6.14. Aumento de peso en g de los camarones cultivados en acuarios con diferentes niveles de temperatura, densidad de población y salinidad del agua, después de cuatro semanas.

	Temperatura											
	25°C						25°C					
	Densidad de Población						Densidad de Población					
	80		160		80		160		80		160	
Salinidad		Salinidad		Salinidad		Salinidad		Salinidad		Salinidad		
	10%	25%	40%	10%	25%	40%	10%	25%	40%	10%	25%	40%
	89	544	390	53	393	249	439	249	247	324	352	188
	52	371	290	73	398	265	436	245	277	305	267	223
	73	482	397	86	208	243	349	330	205	364	316	281
Σ	211	1197	1077	212	999	757	1224	824	729	993	935	692

El análisis se inicia escribiendo el modelo estadístico correspondiente:

$$Y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \delta_j + \lambda_k + (\tau\delta)_{ij} + (\tau\lambda)_{ik} + (\delta\lambda)_{jk} + (\tau\delta\lambda)_{ijk} + \varepsilon_{l(ijk)}$$

$$i = 1, 2; j = 1, 2; k = 1, 2, 3; l = 1, 2, 3.$$

Donde: μ es la media general, τ, δ y λ son los efectos principales de temperatura, densidad y salinidad, respectivamente. Los efectos de la interacción de dos factores son:

$$(\tau\delta)_{ij}, (\tau\lambda)_{ik} \text{ y } (\delta\lambda)_{jk}, \text{ y el efecto de la interacción de tres factores es } (\tau\delta\lambda)_{ijk}$$

Construcción de la tabla de análisis de varianza. Esta tabla tiene tantos renglones como términos el modelo estadístico. Se escribe el producto simbólico para cada fuente de

variación y con base en él y al número de niveles que alcanza cada índice se deducen los grados de libertad y la suma de cuadrados como se explicó en el Capítulo 1. La tabla del ejemplo es la siguiente:

Tabla 6.15. Tabla que muestra la fuente de variación, el producto simbólico, los grados de libertad y la expresión para obtener la suma de cuadrados de cada fuente de variación del experimento sobre cultivo de camarón.

FV	Producto simbólico	GL	C
Temperatura τ_i	$i - 1$	1	$\sum_{i=1}^2 \frac{Y_{i...}^2}{18} - \frac{Y^2 \dots}{36}$
Densidad δ_j	$j - 1$	1	$\sum_{j=1}^2 \frac{Y_{.j..}^2}{18} - \frac{Y^2 \dots}{36}$
Salinidad λ_k	$k - 1$	2	$\sum_{k=1}^3 \frac{Y^{2..k.}}{12} - \frac{Y^2 \dots}{36}$
$(\tau\delta)_{ij}$	$(i - 1)(j - 1) =$ $ij - i - j + 1$	1	$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{Y^2_{ij.}}{9} - \frac{2}{i=1} \frac{Y^2_{i...}}{18} -$ $\sum_{j=1}^2 \frac{Y^2_{.j.}}{18} + \frac{Y^2 \dots}{36}$
$(\tau\lambda)_{ik}$	$(i - 1)(k - 1) =$ $ik - i - k + 1$	2	$\sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^3 \frac{Y^2_{ik.}}{6} - \sum_{i=1}^2 \frac{Y^2_{i...}}{18} -$ $\sum_{k=1}^3 \frac{Y^2_{..k.}}{12} + \frac{Y^2 \dots}{36}$
$(\delta\lambda)_{jk}$	$(j - 1)(k - 1) =$ $jk - j - k + 1$	2	$\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^3 \frac{Y^2_{jk.}}{6} - \sum_{j=1}^2 \frac{Y^2_{.j.}}{18} -$ $\sum_{k=1}^3 \frac{Y^2_{..k.}}{12} + \frac{Y^2 \dots}{36}$
$(\tau\delta\lambda)_{ijk}$	$(i - 1)(j - 1)(k - 1) =$ $ijk - ik - jk + k - ij + i + j - 1$	2	Por diferencia
Error $\varepsilon_{(ijk)}$	$(l - 1)ijk =$ $ijkl - ijk$	24	$\sum_i \sum_j \sum_k \sum_l Y^2_{ijkl} - \frac{2}{i} \sum_j \sum_k \sum_l Y^2_{ijk.}$
Total	$ijkl - 1$	35	$\sum_i \sum_j \sum_k \sum_l Y^2_{ijkl} - \frac{Y^2 \dots}{36}$

Para facilitar el cálculo de las sumas de cuadrados, es conveniente organizar la información en tablas de totales para cada uno de los efectos principales y tablas de doble entrada de cada interacción de dos factores, como se muestra a continuación

Temperatura	$Y_{i..}$
25°C	4636
25°C	5397

Densidad	$Y_{.j.}$
80	5462
160	4588

Salinidad	$Y_{.k}$
10%	2640
25%	4155
40%	3255

Temperatura por Salinidad				
	Salinidad			
Temperatura	10%	25%	40%	Suma
25%	423	2396	1834	4653
35%	2217	1759	1421	5397
Suma	2640	4155	3255	10050

Densidad por Temperatura				
	Temperatura			
Densidad	25°C	35°C	Suma	
80	2685	2777	5462	
160	1968	2620	4588	
Suma	4653	5397	10050	

Para ejemplificar el cálculo de las sumas de cuadrados, a continuación se presenta la obtención de la suma de cuadrados de los efectos principales y la interacción temperatura*densidad.

$$SC \text{ temperatura} = \sum_{i=1}^2 \frac{Y_{i..}^2}{18} - \frac{Y^2}{36}$$

$$= \frac{4653^2 + 5397^2}{18} - \frac{10050^2}{36} = 2821001 - 2805625 = 15376$$

SC densidad =

$$\sum_{j=1}^2 \frac{Y_{j..}^2}{18} - \frac{Y^2 \dots}{36} = \frac{5462^2 + 4588^2}{18} - \frac{10050^2}{36} = 2826843.778 - 2805625 = 21218.778$$

$$\text{SC salinidad} = \sum_{k=1}^3 \frac{Y^2 \dots k}{12} - \frac{Y^2 \dots}{36} = \frac{2640^2 + 4155^2 + 3255^2}{12} - \frac{10050^2}{36} = 96762.5$$

$$\text{SC temperatura}^* \text{densidad} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{Y^2_{ij.}}{9} - \sum_{i=1}^2 \frac{Y^2_{i..}}{18} - \sum_{j=1}^2 \frac{Y^2_{.j.}}{18} + \frac{Y^2 \dots}{36}$$

$$= \frac{2685^2 + 2777^2 + 1968^2 + 2620^2}{9} - 2821001 - 2826843.778 + 2805625$$

$$= 2850930.889 - 2842219.778 = 8711.111$$

El resto de las operaciones se dejan como ejercicio. La Tabla 6.16 muestra el análisis de varianza completo.

Tabla 6.16. Análisis de varianza para el aumento de peso en camarones cultivados.

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrados Medios	Fc	Pr>F
Temperatura	1	15376.0000	15376.0000	5.30	0.0304
Densidad	1	21218.7778	21218.7778	7.31	.0124
Salinidad	2	96762.5000	48381.2500	16.66	<.0001
Temp*densidad	1	8711.1111	8711.1111	3.00	0.0961
Temp*salinidad	2	300855.1667	150427.5833	51.80	<.0001
Dens*salinidad	2	674.3889	337.1944	0.12	0.8909
Temp*dens*sal	2	24038.3889	2019.19441	4.14	0.0285
Error	24	69690.6667	2903.7778		
Total	35	537327.0000			

Interpretación preliminar. Son significativos los efectos principales: temperatura, densidad y salinidad; sin embargo, son también significativas las interacciones temperatura*salinidad y temperatura*densidad*salinidad. La interacción de tres factores indica que la interacción de dos factores no es constante para los niveles del tercer factor. Considere la interacción entre la densidad y la salinidad por separado, a temperaturas de 25°C y 35°C, como se muestra en la Figura 6.15.

Para interpretar la significancia de la interacción de los tres factores se puede usar una comparación de los efectos simples de la salinidad sobre cada nivel de densidad y temperatura. Los efectos simples de la salinidad (factor cuantitativo) se estiman mejor como contrastes ortogonales lineal y cuadrático para cada combinación de temperatura y densidad. La suma de cuadrados de la interacción de los tres factores asociada a dos grados de libertad se puede particionar, para su interpretación, en dos contrastes ortogonales con un grado de libertad cada uno; a saber: $SC(\text{Temp}^*\text{densidad}^*\text{salinidad} \text{ [lineal]})$ y $SC(\text{Temp}^*\text{densidad}^*\text{salinidad} \text{ [cuadrático]})$. La Tabla 6.17 proporciona los coeficientes, que aparecen en las dos últimas filas (en negritas), que definen los dos contrastes que prueban la hipótesis de que el efecto cuadrático de salinidad depende de los niveles de temperatura y densidad de población.

Tabla 6.17. Coeficientes para contrastes en el factorial $2 \times 2 \times 3$ del experimento sobre camarón cultivado

Médis	70.3333	465.6667	359.0000	70.6667	333.0000	252.3333	408.0000	274.6667	243.0000	331.0000	311.6667	230.6667
Tratamintos factoriales	$\tau_1\delta_1\lambda_1$	$\tau_1\delta_1\lambda_2$	$\tau_1\delta_1\lambda_3$	$\tau_1\delta_2\lambda_1$	$\tau_1\delta_2\lambda_2$	$\tau_1\delta_2\lambda_3$	$\tau_1\delta_3\lambda_1$	$\tau_1\delta_3\lambda_2$	$\tau_1\delta_3\lambda_3$	$\tau_2\delta_2\lambda_1$	$\tau_2\delta_2\lambda_2$	$\tau_2\delta_2\lambda_3$
τ	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
λ	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1
λ_{lineal}	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1
$\lambda_{cuadrático}$	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1
$\pi\delta$	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
$\pi\delta_{lineal}$	1	0	-1	-1	0	1	-1	0	1	1	0	-1
$\pi\delta_{cuadrático}$	1	-2	1	-1	2	-1	-1	2	-1	1	-2	1

$$SC(\tau\delta\lambda_{\text{lineal}}) = \frac{3(70.3333 - 359 - 70.6667 + 252.3333 - 408 + 243 + 331 - 230.6667)^2}{8} = 11051.0588$$

$$SC(\tau\delta\lambda_{\text{cuadrático}}) = \frac{3(70.3333 - 2 \times 465.6667 + 359 - 70.6667 + 2 \times 333 - 252.3333 - 408 + 2 \times 274.6667 - 243 + 331 - 2 \times 311.6667 + 230.6667)^2}{24} = 12987.3526$$

Estas sumas de cuadrados corresponden a valores de niveles de significancia observados de 0.0628 y 0.045, respectivamente; mismos que indican que el efecto cuadrático de salinidad depende de los niveles de temperatura y densidad. Las gráficas de la Figura 6.13 corroboran este hecho.

Tabla 6.18. Medias de ganancia de peso en cuatro semanas de camarones cultivados con 2 niveles de temperatura, 2 densidades de población y 3 niveles de salinidad del agua.

Efectos de la Salinidad a 25°C			
	Salinidad		
Densidad	10%	25%	40%
80	70.3333	465.6667	359.0000
160	70.6667	333.0000	252.3333

Efectos de la Salinidad a 35°C			
	Salinidad		
Densidad	10%	25%	40%
80	408.0000	274.667	243.0000
160	331.0000	311.6667	230.6667

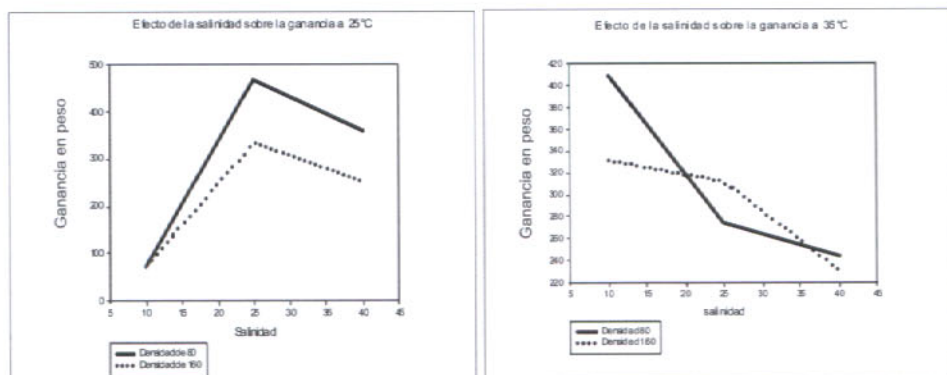


Figura 6.13. Aumento en el peso de los camarones cultivados en un arreglo factorial de $2 \times 2 \times 3$ de temperatura, densidad y salinidad.

El siguiente programa SAS realiza el análisis completo.

```

DATA CAMARONES2;
INPUT INTER TEMP DENSIDAD SAL AUMPESO @@;
CARDS;
1 25 80 10 86 1 25 80 10 52 1 25 80 10 73
2 25 80 25 544 2 25 80 25 371 2 25 80 25 482
3 25 80 40 390 3 25 80 40 290 3 25 80 40 397
4 25 160 10 53 4 25 160 10 73 4 25 160 10 86
5 25 160 25 393 5 25 160 25 398 5 25 160 25 208
6 25 160 40 249 6 25 160 40 265 6 25 160 40 243
7 35 80 10 439 7 35 80 10 436 7 35 80 10 349
8 35 80 25 249 8 35 80 25 245 8 35 80 25 330
9 35 80 40 247 9 35 80 40 277 9 35 80 40 205
10 35 160 10 324 10 35 160 10 305 10 35 160 10 364
11 35 160 25 352 11 35 160 25 267 11 35 160 25 316
12 35 160 40 188 12 35 160 40 223 12 35 160 40 281
;
PROC GLM; CLASS SAL TEMP DENSIDAD INTER;
MODEL AUMPESO = TEMP DENSIDAD SAL TEMP*DENSIDAD TEMP*SAL
DENSIDAD*SAL INTER;
/*CONTRASTES QUE PARTICIONAN LA SUMA DE CUADRADOS DE LA
INTERACCIÓN DE LOS TRES FACTORES EN
SUMA DE CUADRADOS DE LA INTERACCIÓN (TXDXSlineal) y SUMA DE CUADRA-
DOS DE LA INTERACCIÓN (TXDXScuadrático)*/
CONTRAST'TXDXSlin' INTER 1 0 -1 -1 0 1 -1 0 1 1 0 -1;
CONTRAST'TXDXScuad' INTER 1 -2 1 -1 2 -1 -1 2 -1 1 -2 1;
RUN;

```

Explicación. Para probar la hipótesis de que el efecto cuadrático de la salinidad del agua depende de la temperatura y la densidad mediante dos contrastes ortogonales, es necesario declarar una nueva variable en la línea del INPUT. Dicha variable cuyo nombre en el programa es INTER, representa el efecto de la interacción entre los tres factores en estudio. Obsérvese que existen 12 tratamientos factoriales. La primera columna de la matriz de datos del programa SAS que va del 1 al 12 representa a los 12 tratamientos factoriales. La doble arroba que aparece al final de la línea del INPUT permite introducir las tres repeticiones de cada tratamiento factorial en un renglón. Así por ejemplo, las tres repeticiones del tratamiento $\tau_1\delta_1\lambda_1$ representado en el programa por el valor 1 de la variable INTER son: 86, 52 y 73.

Posterior a la sentencia PROC GLM va la de CLASS y en esta instrucción debe agregarse la variable INTER. El modelo se escribe sustituyendo la interacción de los tres factores

por la variable INTER misma que debe ir al final tal como se presenta en la siguiente instrucción. Lo anterior es debido a que las sumas de cuadrados «type I» es una suma de cuadrados secuencial.

MODEL AUMPESO = TEMP DENSIDAD SAL TEMP*DENSIDAD TEMP*SAL DENSIDAD*SAL **INTER**;

Los coeficientes que definen los dos contrastes de interés son los que aparecen en negritas en la Tabla 6.17.

CONTRAST'TXDXSlin' INTER **1 0 -1 -1 0 1 -1 0 1 0 -1**;
 CONTRAST'TXDXScuad' INTER **1 -2 1 -1 2 -1 -1 2 -1 1 -2 1**;

La salida del programa es la siguiente:

Sistema SAS					
Procedimiento GLM					
Variable dependiente: AUMPESO					
Fuente	DF	Suma de cuadrados	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
Modelo	11	467636.3333	42512.3939	14.64	<.0001
Error	24	69690.6667	2903.7778		
Total correcto	35	537327.0000			
R-cuadrado	0.870301	Coef Var	19.30270	Raiz MSE	53.88671
				AUMPESO Media	279.1667
Fuente	DF	Tipo I SS	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
TEMP	1	15376.0000	15376.0000	5.30	0.0304
DENSIDAD	1	21218.7778	21218.7778	7.31	0.0124
SAL	2	96762.5000	48381.2500	6.66	<.0001
TEMP*DENSIDAD	1	8711.1111	8711.1111	3.00	0.0961
SAL*TEMP	2	300855.1667	150427.5833	51.80	<.0001
SAL*DENSIDAD	2	674.3889	337.1944	0.12	0.8909
INTER	2	24038.3889	12019.1944	4.14	0.0285
Contraste	DF	Contraste SS	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
TXDXSlin	1	11051.04167	11051.04167	3.81	0.0628
TXDXScuad	1	12987.34722	12987.34722	4.47	0.0450

Interpretación: El contraste que prueba la interacción del efecto lineal de salinidad con los efectos de temperatura y densidad es significativo al 0.0628.

El contraste que prueba la interacción del efecto cuadrático de salinidad con los efectos de temperatura y densidad es significativo a 0.045. El análisis de este último contraste puede ser descompuesto en cuatro pruebas, que corresponden a las 4 combinaciones de temperatura y densidad, a partir de las medias de celdas de la Tabla 6.17 como se indica a continuación.

Para probar el efecto cuadrático de salinidad a 25°C y a una densidad de 80, el contraste estimado es:

$$\hat{Q}_{t25d80} = 70.3333 - 2 \times 465.6667 + 359 = -502$$

Para probar la hipótesis de que este contraste es cero se calcula un valor de t según se estudió en el Capítulo 3; teoremas 1, 2 y 3 de este libro.

$$t = \frac{\hat{Q}_{t25d80}}{\sqrt{\frac{CME}{r} \sum c_i^2}} = \frac{-502}{\sqrt{\frac{2903.7778}{3} [1^2 + (-2)^2 + 1]}} = \frac{-502}{\sqrt{5807.5556}} = -6.5873$$

A un nivel de significancia del 0.05, el valor crítico de t de Student con 24 grados de libertad, para una prueba de dos lados, es $t_{0.025}(24) = 2.064$. Véase Tabla D del Anexo.

Regla de decisión: Se concluye que existe efecto cuadrático significativo de la salinidad si

$$|t_{\text{cal}}| \geq t_{0.025}(24) = 2.064, \text{ si no, no}$$

Ya que $|t_{\text{cal}}| = 6.5873 > 2.064$, se concluye que existe un efecto cuadrático significativo de la salinidad a 25°C y una densidad de 80.

De la misma manera, para probar el efecto cuadrático de salinidad a 25°C y a una densidad de 160, el contraste estimado es:

$$\hat{Q}_{t_{25d160}} = 70.6667 - 2 \times 333 + 252.3333 = -343$$

$$t = \frac{\hat{Q}_{t_{25d160}}}{\sqrt{\frac{CME}{r} \sum c_i^2}} = \frac{-343}{\sqrt{\frac{2903.7778}{3} [1^2 + (-2)^2 + 1]}} = \frac{-343}{\sqrt{5807.5556}} = -4.5$$

Ya que $|t_{cal}| = 4.5 > 2.064$, se concluye que existe un efecto cuadrático significativo de la salinidad a 25°C y una densidad de 160.

Para probar el efecto cuadrático de salinidad a 35°C y a una densidad de 80, el contraste estimado es:

$$\hat{Q}_{t_{35d80}} = 408 - 2 \times 274.6667 + 243 = 101.6667$$

$$t = \frac{\hat{Q}_{t_{35d80}}}{\sqrt{\frac{CME}{r} \sum c_i^2}} = \frac{101.6667}{\sqrt{\frac{2903.7778}{3} [1^2 + (-2)^2 + 1]}} = \frac{101.6667}{\sqrt{5807.5556}} = 1.334$$

Ya que $|t_{cal}| = 1.334 < 2.064$, se concluye que no existe un efecto cuadrático significativo de la salinidad a 35°C y una densidad de 80.

Para probar el efecto cuadrático de salinidad a 35°C y a una densidad de 160, el contraste estimado es:

$$\hat{Q}_{t_{35d160}} = 331 - 2 \times 311.6667 + 230.6667 = -61.6667$$

$$t = \frac{\hat{Q}_{t_{35d160}}}{\sqrt{\frac{CME}{r} \sum c_i^2}} = \frac{-61.6667}{\sqrt{\frac{2903.7778}{3} [1^2 + (-2)^2 + 1]}} = \frac{-61.6667}{\sqrt{5807.5556}} = -0.8092$$

Ya que $|t_{cal}| = 0.8092 < 2.064$, se concluye que no existe un efecto cuadrático significativo de la salinidad a 35°C y una densidad de 160.

REFERENCIAS

Kuehl, R. O. 2001. Diseño de Experimentos (Principios estadísticos de diseño y análisis de investigación). 2ª ed. Thomson – Learning. México. 666 p.

Méndez, R. I. 1980. *Experimentos Factoriales Balanceados Completos*. Comunicaciones Técnicas. IIMAS – UNAM. México. 75 p.

Herrera, H. J. 1997. *Análisis de Experimentos con Animales*. Colegio de Postgraduados. Instituto de Enseñanza e Investigación en Ciencias Agrícolas. Programa de Ganadería, IREGEP. México. 138 p.

6.6. Ejercicios de problemas diversos

6.1 Un ingeniero agrónomo roció hojas de manzano con tres diferentes concentraciones de un compuesto de nitrógeno, luego determinó la cantidad de nitrógeno (mg por dm cuadrado) que permanecía en las hojas inmediatamente después de la aplicación y al final de dos tiempos subsecuentes. La finalidad de este experimento era determinar la rapidez a la que el nitrógeno era absorbido por las hojas. Hubo dos repeticiones de cada tratamiento en un diseño experimental completamente al azar.

Niveles de Nitrógeno (Factor a)

Tiempo (factor b)	Niveles de Nitrógeno (Factor a)		
	a_0	a_1	a_2
b_2	2.29	6.50	8.75
	2.24	5.94	9.52
b_1	0.46	3.03	2.49
	0.19	1.00	2.04
b_2	0	0.75	1.40
	0.26	1.16	1.81

Obtenga el análisis de varianza que subdivide a los 8 grados de libertad para tratamientos en efectos individuales.

6.1 Se realizó un experimento con becerros Holstein de un año de edad, en el cual se midió la ganancia de peso en corral en un período de cuatro meses para estudiar el efecto de suplementar diferentes fuentes de energía¹ en la dieta (factor A) en animales implantados con una hormona (factor B). El diseño experimental fue completamente al azar. La fuente de proteína fue gallinaza.

Fuente de Energía

 a_1 testigo a_2 melaza a_3 grasa

Hormona

 b_1 sin implante b_2 con implante

Repetición	Tratamientos							
	a_1b_1	a_1b_2	a_2b_1	a_2b_2	a_3b_1	a_3b_2	a_4b_1	a_4b_2
1	83	90	115	135	80	76	76	80
2	72	68	108	117	69	71	67	73
3	67	75	113	125	52	48	65	68
4	56	70	98	116	73	75	71	77
5	80	76	118	130	84	86	59	75

a) Realice el análisis de varianza.

b) Mediante un contraste compare el testigo contra las otras tres fuentes de energía para los animales que recibieron el implante.

c) Haga la prueba del mismo contraste del inciso b) sin considerar el uso o no del implante hormonal.

d) Grafique la interacción de los factores aun cuando no haya resultado significativa ésta.

6.1 Se realizó un experimento factorial para comparar el efecto de 3 niveles de pH del suelo, 3 niveles de aditivo de calcio sobre el incremento en el diámetro de troncos de naranjos medido en cm.

		pH		
		4	5	6
Aditivo	100	5.2	7.1	7.2
		5.9	7.4	7.5
		6.3	7.5	7.2
	200	7.4	7.4	7.4
		7.0	7.3	7.0
		7.6	7.1	6.9
	300	6.3	7.3	6.8
		6.7	7.5	6.6
		6.1	7.2	6.4

- a) Realice el análisis de varianza.
- b) Obtenga los efectos lineal y cuadrático de ambos factores.
- c) Obtenga los efectos lineal y cuadrático de la interacción pH x Ca.
- d) Obtenga la suma de cuadrados para cada uno de los efectos de los incisos b) y c)
- e) Haga una gráfica de la interacción e interprete los resultados.

6.1 Se realizó un experimento para conocer el efecto del procesamiento físico (tamaño de partícula) y la aplicación de hidróxido de sodio (NaOH) en la digestibilidad *in vitro* del bagazo de maguey y las puntas de caña para su posterior uso en raciones para borregos.

Factores	Niveles	Notación
A	Bagazo de Maguey	a_1
	Puntas de Caña	a_2
B Nivel de NaOH	2 g/100 de MS	b_1
	4	b_2
	6	b_3
	8	b_4
C Tamaño de Particula	0.5 mm	c_1
	1.0 mm	c_2
	2.0 mm	c_3

		Factor C		Factor A				
				a ₁			a ₂	
Factor B	b ₁	c ₁	40	38	43	45	48	44
		c ₂	35	32	36	37	36	39
		c ₃	45	40	43	43	45	48
	b ₂	c ₁	42	44	42	45	47	42
		c ₂	38	36	39	42	40	39
		c ₃	46	48	50	50	54	58
	b ₃	c ₁	48	50	47	50	53	51
		c ₂	38	35	33	45	42	38
		c ₃	46	43	47	49	54	52
	b ₄	c ₁	51	53	55	53	56	50
		c ₂	40	48	46	45	47	41
		c ₃	48	52	54	54	58	53

- Mediante un programa en SAS realice el análisis de varianza que descompone los 23 grados de libertad de tratamientos en las 7 fuentes de variación.
- Elabore gráficas de la interacción C*B colocando en el eje de las X el factor B.
- Mediante un contraste pruebe la hipótesis del efecto cuadrático del factor B (nivel de NaOH) sobre la digestibilidad *in vitro* a cada nivel del factor C (tamaño de partícula) en promedio sobre el factor cualitativo A.
- Concluya en el contexto del problema.

CAPÍTULO 7

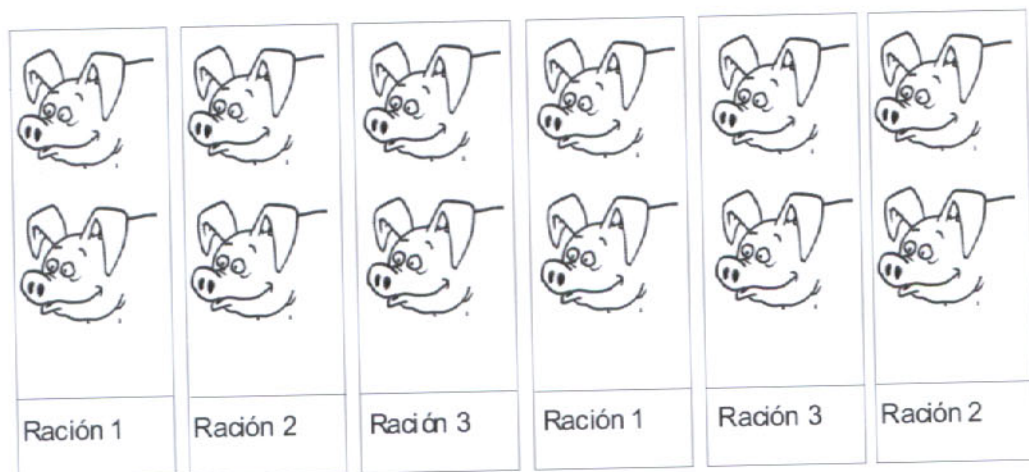
DISEÑO EN PARCELAS DIVIDIDAS

En ciertos trabajos de investigación en los que los tratamientos se construyen mediante la combinación de los niveles de dos o más factores, se presentan situaciones en las que algún factor requiere unidades experimentales (UE) grandes, debido a su propia naturaleza. En estos casos, si se quiere estudiar conjuntamente otro factor, se pueden dividir las UE grandes en UE más pequeñas y asignar aleatoriamente los niveles del segundo factor a esas UE. El arreglo resultante se conoce como parcelas divididas (split plot). Estos dos niveles de aleatorización dan origen a dos tipos de error en el modelo, de manera que el factor asignado a la parcela grande se prueba con su error correspondiente, y el factor asignado a las parcelas chicas y la interacción con el error de parcelas chicas. Las inferencias sobre el factor aplicado a parcelas chicas son más precisas que las del factor localizado en parcelas grandes ya que las parcelas chicas, dentro de parcelas grandes, tienden a tener covarianza positiva lo que reduce la varianza del error.

7.1. Diseño completamente al azar con arreglo en parcelas divididas

Considérese un diseño completamente al azar con a niveles de un factor A y r repeticiones para cada tratamiento. Si cada una de las $a \times r$ unidades o parcelas básicas se divide en b subunidades o subparcelas y sobre éstas se colocan al azar los b niveles de otro factor B . Se genera el diseño completamente al azar con arreglo en parcelas divididas. Las bases del análisis se presentan mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.1. Supóngase que se quieren comparar tres raciones para engorda de cerdos y se cuenta con seis corrales con dos animales cada uno y se asignan aleatoriamente dos corrales para cada ración. El esquema de campo se muestra en la siguiente figura.



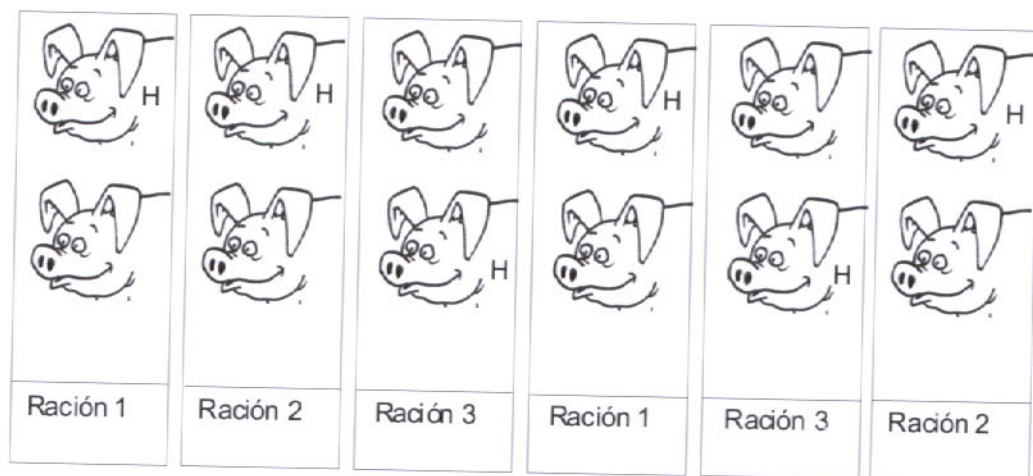
El diseño mostrado en la figura produce dos repeticiones independientes de cada tratamiento, para lo cual se requiere que los animales utilizados sean lo más homogéneos posible. El modelo es:

$$Y_{ik} = \mu + r_i + \varepsilon_{k(i)} \quad i = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2$$

r_i es el efecto de ración $i = 1, 2, 3$

$\varepsilon_{j(i)}$ se llama efecto de corral j -ésimo dentro de la ración i -ésima o bien se llama error experimental.

Es común que en esta situación experimental se agregue otro factor dentro de unidades pequeñas (cerdos) y se estudie el efecto principal más su interacción con el factor asignado a las unidades grandes (corrales). Suponga que a un cerdo seleccionado al azar de los dos de cada corral se le inyecta una hormona y al otro no. Lo que se tiene ahora es un diseño completamente al azar con arreglo en parcelas divididas. En la siguiente figura la letra H indica la aplicación de la hormona.



El modelo adecuado es:

$$Y_{ijk} = \mu + r_i + \delta_{k(i)} + H_j + (rH)_{ij} + \varepsilon_{jk(i)}$$

Donde

r_i es el efecto de ración $i=1,2,3$;

$\delta_{k(i)}$ es el error experimental para la unidad grande (corral), se le llama error (A), con $k = 1,2$; H_j es el efecto de la hormona con $j=1,2$; $(rH)_{ij}$ es la interacción hormona por ración; $\varepsilon_{jk(i)}$ es el error experimental para la unidad pequeña y la interacción hormona por ración.

Ejemplo 7.2. Para ejemplificar el análisis supóngase que al término del experimento los incrementos de peso son los que se reportan en la Tabla 7.1.

Tabla 7.1. Incremento de peso en kilogramos del experimento de raciones en cerdos.

H1 75	H1 74	Ho 83	H1 71	Ho 68	H1 70
Ho 55	Ho 64	H1 91	Ho 59	H1 86	Ho 71
r_1	r_2	r_3	r_1	r_3	r_2

El programa en SAS que realiza el análisis es el siguiente:

```

DATA PARDIV;
INPUT RACION H CORRAL RESP;
CARDS;
1 0 1 55
1 0 2 59
1 1 1 75
1 1 2 71
2 0 1 64
2 0 2 71
2 1 1 74
2 1 2 70
3 0 1 83
3 0 2 68
3 1 1 91
3 1 2 86;
PROC ANOVA; CLASS RACION H CORRAL;
MODEL RESP = RACION CORRAL(RACION) H RACION*H;
TEST H=RACION E=CORRAL(RACION);
MEANS RACION / TUKEY E=CORRAL(RACION)ALPHA=0.06;
MEANS H;
RUN;
    
```

Explicación: Se escribe el modelo reducido en la segunda línea de procedimientos:
`MODEL RESP = RACION CORRAL(RACION) H RACION*H;`

En el modelo, el término CORRAL anidado en RACIÓN, se escribe: CORRAL(RACION) y es el término de error para probar el efecto de ración que está aplicado en la parcela grande (corral). Es necesario indicar con qué error se debe probar el efecto de parcela grande (ración). La instrucción es:

`TEST H=RACION E=CORRAL(RACION);`

En el caso de parcelas chicas e interacción no es necesario indicar el error ya que el programa lo considera automáticamente.

Finalmente si procede, como es el caso en este ejemplo, conviene llevar a cabo una prueba de comparaciones múltiples para el factor ración y es necesario también indicar el error apropiado. La instrucción en este caso es:

`MEANS RACION / TUKEY E=CORRAL(RACION)ALPHA=0.06;`

Nótese que al final de esta instrucción se indica el nivel de significancia para realizar la prueba. Si se omite este dato el nivel que asume SAS para la prueba es 0.05.

La última instrucción es para que calcule los promedios que corresponden al factor hormona.

La salida de resultados es la siguiente:

Procedimiento ANOVA					
Variable dependiente: RESP					
Fuente	DF	Suma de cuadrados	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
Modelo	8	1163.000000	145.375000	6.12	0.0819
Error	3	71.250000	23.750000		
Total correcto	11	1234.250000			
	R-cuadrado	Coef Var	Raiz MSE	RESP Media	
	0.942273	6.745186	4.873397	72.25000	

Fuente	DF	Anova SS	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
RACION	2	615.5000000	307.7500000	12.96	0.0334
CORRAL(RACION)	3	102.2500000	34.0833333	1.44	0.3869
H	1	374.0833333	374.0833333	15.75	0.0286
RACION*H	2	71.1666667	35.5833333	1.50	0.3539

Tests de hipótesis usando el MS Anova para CORRAL(RACION) como un término de error

Fuente	DF	Anova SS	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
RACION	2	615.5000000	307.7500000	9.03	0.0538

Prueba del rango estudentizado de Tukey (HSD) para RESP

NOTA: Este test controla el índice de error experimentwise de tipo I, pero normalmente tiene un índice de error de tipo II más elevado que REGWQ.

Alfa	0.06
Error de grados de libertad	3
Error de cuadrado medio	34.08333
Valor crítico del rango estudentizado	5.50400
Diferencia significativa mínima	16.066

Medias con la misma letra no son significativamente diferentes.

Tukey	Agrupamiento	Media	N	RACION
	A	82.000	4	3
	A			
B	A	69.750	4	2
B				
B		65.000	4	1

Nivel de		RESP	
H	N	Media	Dev std
0	6	66.6666667	9.89275829
1	6	77.8333333	8.61200712

Se debe elaborar una tabla de análisis de varianza integrando los dos tipos de error con las F calculadas y los niveles de significancia para las fuentes de variación.

Tabla 7.2. Análisis de varianza para el diseño completamente al azar con arreglo en parcelas divididas.

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrados Medios	F_0	Pr > F
Ración	2	615.5000	307.7500	9.03	0.0538
Error (1)	3	102.2500	34.0833		
H	1	374.0833	374.0833	15.75	0.0286
Ración*H	2	71.1667	35.5833	1.05	0.3539
Error (2)	3	71.2500	23.7500		
Total	11	1234.2500			

Interpretación: El factor ración resulta significativo a un nivel observado de significancia de 0.0538. El factor hormona es significativo con un nivel observado de significancia de 0.0286. La interacción es no significativa ya que su nivel observado de significancia es 0.3539. Se procedió a una comparación múltiple de medias de Tukey a un nivel de significancia de 0.06 y el resultado indica que las raciones 3 y 2 forman un grupo con el mayor incremento de peso en los cerdos con incrementos de 82 y 69.75 kg, respectivamente. La aplicación de la hormona tiene un efecto significativo de $7.83 - 66.767 = 11.16$ kg de incremento promediado sobre el factor ración.

En general, un diseño completamente al azar con arreglo en parcelas divididas, con el factor en parcela grande denotado por A con a niveles, el de parcela chica por B con b niveles y las repeticiones por R con r número de repeticiones, tiene las siguientes fuentes de variación y grados de libertad:

Fuente de Variación	Grados de Libertad
A	$a - 1$
$R(A) = R + R \times A = \text{Error (1)}$	$(r - 1)a$
B	$b - 1$
$A \times B$	$(a - 1)(b - 1)$
$R \times B(A) = R \times B + R \times B \times A = \text{Error (2)}$	$(r - 1)(b - 1)a$
Total	$a \times b \times r - 1$

7.2. Diseño en bloques completos al azar con arreglo en parcelas divididas

Considérese un diseño de r bloques completos al azar con a tratamientos A . Si cada una de las $a \times r$ unidades o parcelas básicas se divide en b subunidades o subparcelas y sobre éstas se colocan al azar los b niveles de otro factor B , se genera el diseño de bloques completos al azar con arreglo en parcelas divididas. El procedimiento de análisis de este diseño se presenta con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.3. Supóngase un experimento para comparar tres láminas de riego y cuatro variedades de pasto. Las láminas de riego requieren superficies grandes por lo que este factor se asigna a parcela grande que se distribuye aleatoriamente en cada uno de tres bloques. La razón de bloqueo fue la diferente pendiente del terreno. En cada bloque y en cada parcela grande se distribuyen aleatoriamente las tres variedades de pasto. El resultado es un diseño de bloques completos al azar con arreglo en parcelas divididas.

La siguiente figura muestra el esquema de un bloque:

P	P	P	P
A	A	A	A
S	S	S	S
T	T	T	T
O	O	O	O
3	1	4	2
Lámina de riego			

BLOQUE 1

El modelo para este experimento es:

$$Y_{ijk} = \mu + L_i + B_j + \delta_{ij} + P_k + (LP)_{ik} + \varepsilon_{ijk}$$

L_i es el efecto de lámina de riego en su nivel i ; B_j es el efecto de bloque en su nivel j ; δ_{ij} es el error (1) para probar lámina de riego; P_k es el efecto del factor pasto en su nivel k ; $(LP)_{ik}$ es el efecto de la interacción entre el factor lámina de riego en su nivel i y el factor pasto en su nivel k ; ε_{ijk} es el error (2) para probar el efecto de pasto y la interacción entre lámina de riego y pasto.

La siguiente tabla muestra los rendimientos obtenidos en kilogramos de materia seca de pasto por parcela útil.

Tabla 7.3. Rendimientos obtenidos en kilogramos de materia seca del Ejemplo 2.

	Láminas de riego	Bloque 1	Bloque 2	Bloque 3
Pasto 1	L1	10.5	9.3	12.9
	L2	14.1	13.3	16.7
	L3	14.8	13.6	16.2
	L4	14.0	15.6	18.6
Pasto 2	L1	7.1	5.1	9.3
	L2	9.8	7.4	11.6
	L3	15.3	12.2	9.2
	L4	14.0	14.0	18.1
Pasto 3	L1	7.0	6.3	9.9
	L2	8.3	7.4	10.6
	L3	6.8	5.5	12
	L4	8.0	8.9	14

El análisis del experimento lo realiza el siguiente programa SAS.

```
DATA PARCDIV;
INPUT BLOQUE PASTO LAMINA REN @@;
CARDS;
1 1 1 10.5 1 1 2 14.1 1 1 3 14.8 1 1 4 14
1 2 1 7.1 1 2 2 9.8 1 2 3 15.3 1 2 4 14
1 3 1 7 1 3 2 8.3 1 3 3 6.8 1 3 4 8
2 1 1 9.3 2 1 2 13.3 2 1 3 13.6 2 1 4 15.6
2 2 1 5.1 2 2 2 7.4 2 2 3 12.2 2 2 4 14
2 3 1 6.3 2 3 2 7.4 2 3 3 5.5 2 3 4 8.9
3 1 1 12.9 3 1 2 16.7 3 1 3 16.2 3 1 4 18.6
3 2 1 9.3 3 2 2 11.6 3 2 3 9.2 3 2 4 18.1
3 3 1 9.9 3 3 2 10.6 3 3 3 12 3 3 4 14
;
```

```
PROC ANOVA; CLASS BLOQUE PASTO LAMINA;
MODEL REN = BLOQUE PASTO BLOQUE*PASTO LAMINA PASTO*LAMINA;
TEST H=PASTO E = BLOQUE*PASTO;
RUN;
```

Explicación: En este programa la instrucción que define el modelo a ajustar es:

MODEL REN = BLOQUE PASTO BLOQUE*PASTO LAMINA PASTO*LAMINA;

Nótese que la interacción BLOQUE*PASTO se utiliza como término de error (1) para probar el factor pasto. Lo anterior es debido a que este diseño no cuenta con repeticiones verdaderas. Debe tomarse en cuenta este hecho ya que se asume que no existe interacción entre los factores pasto y bloque.

El efecto de pasto se prueba con el error (1) mediante la instrucción:

TEST H=PASTO E = BLOQUE*PASTO;

En el caso de parcelas chicas e interacción no es necesario indicar el error ya que el programa lo considera automáticamente.

Los resultados del programa son los siguientes:

Procedimiento ANOVA

Variable dependiente: REN

Fuente	DF	Suma de cuadrados	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
Modelo	17	431.7916667	25.3995098	10.12	<.0001
Error	18	45.1583333	2.5087963		
Total correcto	35	476.9500000			

R-cuadrado	Coef Var	Raiz MSE	REN Media
0.905319	13.99633	1.583918	11.31667

Fuente	DF	Anova SS	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
BLOQUE	2	72.9950000	36.4975000	14.55	0.0002
PRADERA	2	176.4116667	88.2058333	35.16	<.0001
BLOQUE*PRADERA	4	14.0333333	3.5083333	1.40	0.2744
LAMINA	3	129.3455556	43.1151852	17.19	<.0001
PRADERA*LAMINA	6	39.0061111	6.5010185	2.59	0.0547

Tests de hipótesis usando el MS Anova para BLOQUE*PRADERA como un término de error.

Fuente	DF	Anova SS	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
PRADERA	2	176.4116667	88.2058333	25.14	0.0054

A partir de los resultados se elabora la siguiente tabla del análisis de varianza.

Tabla 7.4. Análisis de varianza para el diseño en bloques completos al azar con arreglo en parcelas divididas.

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrados Medios	F_0	Pr > F
Bloque	2	72.9950	36.4975		
Pradera	2	176.4117	88.2058	25.14	0.0054
Error (1)	4	14.0333	3.5083		
Lámina	3	129.3456	43.1152	17.19	< 0.0001
Past*Lám	6	39.0061	6.5010	2.59	0.0547
Erro (2)	18	45.1583	2.5088		
Total	35	476.9500			

Interpretación: Los efectos principales son altamente significativos, la interacción es significativa a $Pr > F$ de 0.0547. En casos como este, en el que la interacción de los dos factores es significativa, es necesario estudiar la interacción ya que ésta mide las diferencias entre los efectos simples de los tres tipos de pasto en cada una de las cuatro láminas de riego. En este ejemplo, se procede a estudiar la interacción mediante una comparación múltiple de medias de Tukey. La modificación del programa SAS implica crear una nueva variable que se denota con la palabra TRAT cuyos valores son la combinación de los tratamientos factoriales según la siguiente tabla:

Tratamiento factorial	TRAT
P1L1	1
P1L2	2
P1L3	3
P1L4	4
P2L1	5
P2L2	6
P2L3	7
P2L4	8
P3L1	9
P3L2	10
P3L3	11
P3L4	12

Proceda a analizar las medias de TRAT como si se tratara de un diseño de bloques completos al azar e incluya la interacción BLOQUE*PASTO. El programa es el siguiente:

```
DATA PARCDIV;
INPUT BLOQUE PASTO LAMINA REN TRAT @@;
CARDS;
1 1 1 10.5 1 1 1 2 14.1 2 1 1 3 14.8 3 1 1 4 14 4
1 2 1 7.1 5 1 2 2 9.8 6 1 2 3 15.3 7 1 2 4 14 8
1 3 1 7 9 1 3 2 8.3 10 1 3 3 6.8 11 1 3 4 8 12
2 1 1 9.3 1 2 1 2 13.3 2 2 1 3 13.6 3 2 1 4 15.6 4
2 2 1 5.1 5 2 2 2 7.4 6 2 2 3 12.2 7 2 2 4 14 8
2 3 1 6.3 9 2 3 2 7.4 10 2 3 3 5.5 11 2 3 4 8.9 12
3 1 1 12.9 1 3 1 2 16.7 2 3 1 3 16.2 3 3 1 4 18.6 4
3 2 1 9.3 5 3 2 2 11.6 6 3 2 3 9.2 7 3 2 4 18.1 8
3 3 1 9.9 9 3 3 2 10.6 10 3 3 3 12 11 3 3 4 14 12
;
PROC GLM; CLASS BLOQUE TRAT PASTO;
MODEL REN = BLOQUE TRAT BLOQUE*PASTO;
MEANS TRAT / TUKEY;
RUN;
```

Explicación: Este procedimiento ignora la estructura del diseño experimental en la cual están involucrados los factores pasto y lámina de riego ya que el interés de éste es el estudio de la interacción entre ambos factores representada aquí en la variable TRAT. Es necesario tomar en cuenta que tanto los grados de libertad, como las sumas de cuadrados asociados a TRAT, deben coincidir con la suma de los grados de libertad y la suma de las sumas de cuadrados reportados en el análisis anterior para las fuentes de variación siguientes: PASTO, LAMINA Y PASTO*LAMINA. Además la instrucción que introduce el modelo reducido es:

```
MODEL REN = BLOQUE TRAT BLOQUE*PASTO;
```

Esta instrucción que acompaña al procedimiento GLM de SAS proporciona los grados de libertad y el cuadrado medio del error correcto para probar la interacción representada en el presente programa por el factor TRAT.

Obsérvese en la siguiente salida de computadora que el procedimiento GLM proporciona dos tipos de sumas de cuadrados, en este caso solo se toma en cuenta los datos correspondientes a suma de cuadrados tipo I.

Procedimiento GLM

Variable dependiente: REN

Fuente	DF	Suma de cuadrados	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
Modelo	17	431.7916667	25.3995098	10.12	<.0001
Error	18	45.1583333	2.5087963		
Total correcto	35	476.9500000			

R-cuadrado	Coef Var	Raiz MSE	REN Media
0.905319	13.99633	1.583918	11.31667

Fuente	DF	Tipo I SS	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
BLOQUE	2	72.9950000	36.4975000	14.55	0.0002
TRAT	11	344.7633333	31.3421212	12.49	<.0001
BLOQUE*PRADERA	4	14.0333333	3.5083333	1.40	0.2744

Fuente	DF	Tipo III SS	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
BLOQUE	2	72.9950000	36.4975000	14.55	0.0002
TRAT	9	168.3516667	18.7057407	7.46	0.0002
BLOQUE*PRADERA	4	14.0333333	3.5083333	1.40	0.2744

Sistema SAS
Procedimiento GLM

Prueba del rango estudentizado de Tukey (HSD) para REN

NOTA: Este test controla el índice de error experimentwise de tipo I, pero normalmente tiene un índice de error de tipo II más elevado que REGWQ.

Alfa	0.05
Error de grados de libertad	18
Error de cuadrado medio	2.508796
Valor crítico del rango estudentizado	5.26641
Diferencia significativa mínima	4.816

Medias con la misma letra no son significativamente diferentes.

Tukey	Agrupamiento		Media	N	TRAT
		A	16.067	3	4
		A			
B		A	15.367	3	8
B		A			
B		A	14.867	3	3
B		A			
B		A	14.700	3	2
B		A			
B	D	A	12.233	3	7
B	D				
B	D	E	10.900	3	1
	D	E			
	D	E	10.300	3	12
	D	E			
	D	E	9.600	3	6
	D	E			
	D	E	8.767	3	10
	D	E			
	D	E	8.100	3	11
	D	E			
	D	E	7.733	3	9
		E			
		E	7.167	3	5

En general, un diseño en bloques completos al azar con arreglo en parcelas divididas con el factor en parcela grande denotado por A con a niveles, el de parcela chica por B con b niveles, el factor de bloqueo por R con r bloques, tiene las siguientes fuentes de variación y grados de libertad:

Fuente de variación	Grados de libertad
R	$r - 1$
A	$a - 1$
$R \times A = \text{Error}(1)$	$(r - 1)(a - 1)$
B	$b - 1$
$A \times B$	$(a - 1)(b - 1)$
$R \times B(A) = R \times B + R \times B \times A = \text{Error}(2)$	$(r - 1)(b - 1)a$
Total	$r \times a \times b - 1$

7.3. Diseño en bloques completos al azar con arreglo en parcelas subdivididas

Si en un diseño de r bloques completos al azar con arreglo en parcelas divididas con a tratamientos A en las parcelas grandes y b tratamientos B en las parcelas chicas, cada una de éstas últimas se divide en c subparcelas, y sobre éstas se colocan al azar c tratamientos C , se obtiene una extensión de los diseños de parcelas divididas. Al diseño así generado se le llama diseño de bloques completos al azar con arreglo en parcelas subdivididas. Este diseño tiene las siguientes fuentes de variación y grados de libertad:

Fuente de variación	Grados de libertad
R	$r - 1$
A	$a - 1$
$R \times A = \text{Error (1)}$	$(r - 1)(a - 1)$
B	$b - 1$
$A \times B$	$(a - 1)(b - 1)$
$R \times B(A) = R \times B + R \times B \times A = \text{Error (2)}$	$(r - 1)(b - 1)a$
C	$c - 1$
$A \times C$	$(a - 1)(c - 1)$
$B \times C$	$(b - 1)(c - 1)$
$A \times B \times C$	$(a - 1)(b - 1)(c - 1)$
$R \times C(A) + R \times B \times C(A) = R \times C + R \times A \times C + R \times B \times C$ $+ R \times A \times B \times C = \text{Error (3)}$	$ab(r - 1)(c - 1)$
Total	$r \times a \times b \times c - 1$

El error (1) se usa para probar el factor A.

El error (2) es para probar el factor B y la interacción $A \times B$.

El error (3) es para probar el factor C y las interacciones: $A \times C$, $B \times C$, y $A \times B \times C$.

Con base en las fuentes de variación de este diseño, un programa en SAS que realiza el análisis de varianza es el siguiente:

```
DATA PARCSUBD;
```

INPUT R A B C RESP;
CARDS;

MATRIZ DE DATOS EN EL ORDEN ESTABLECIDO EN EL INPUT;

PROC ANOVA; CLASS R A B C;

MODEL RESP = R A R*A B A*B R*B(A) C A*C B*C A*B*C;

TEST H=A E = R*A;

TEST H = B A*B E = R*B(A);

RUN;

Nótese que es innecesario indicar al Error $(C) = R*C(A) + R*B*C(A)$ así como las pruebas que se realizan con este error, ya que el programa las asume automáticamente.

7.4. Diseño en bloques divididos

Una variante común al diseño básico de parcelas divididas en el campo agrícola consiste en ensayar ambos factores en parcelas grandes. Este diseño es útil cuando ambos factores requieren parcelas grandes. Considérese la siguiente figura que representa una repetición completa de tres niveles del factor A en las columnas y cuatro del B en las hileras, donde los niveles de cada factor se han sorteado al azar sobre columnas e hileras.

		Niveles del factor A		
Niveles de B		A_3	A_2	A_1
B_3				
B_1				
B_2				
B_4				

En general, un diseño en bloques divididos con uno de los factores denotado por A con a niveles, el otro factor B con b niveles el factor de bloqueo por R con r bloques, tiene las siguientes fuentes de variación y grados de libertad:

Fuente de variación	Grados de libertad
R = Repeticiones	$r - 1$
A	$a - 1$
R × A = Error (1)	$(r - 1)(a - 1)$
B	$b - 1$
R × B = Error (2)	$(r - 1)(b - 1)$
A × B	$(a - 1)(b - 1)$
R × (A × B) = Error (3)	$(r - 1)(a - 1)(b - 1)$
Total	$r \times a \times b - 1$

Con base en las fuentes de variación de este diseño, un programa en SAS que realiza el análisis de varianza es el siguiente:

```
DATA BDIV;
INPUT R A B RESP;
CARDS;
```

MATRIZ DE DATOS EN EL ORDEN ESTABLECIDO EN EL INPUT

```
;
PROC ANOVA; CLASS R A B;
MODEL RESP = R A R*A B R*B A*B;
TEST H = A E = R*A;
TEST H = B E = R*B;
RUN;
```

REFERENCIAS

- Herrera, H. J. 1997. *Análisis de Experimentos con Animales*. Colegio de Postgraduados. Instituto de Enseñanza e Investigación en Ciencias Agrícolas. Programa de Ganadería, IREGEP. México. 138 p.
- Kuehl, R. O., 2001. *Diseño de Experimentos (Principios estadísticos de diseño y análisis de investigación)*. 2da. Ed. Thomson – Learning. México. 666 p.
- Méndez, R. I. 1990. *Modelos Estadísticos Lineales en la Investigación Comparativa*. Departamento de Estadística, IIMAS – UNAM. México. 55 p.

7.5. EJERCICIO

Se realizó un experimento para conocer la respuesta (cantidad de materia seca MS producida anualmente en ton/ha) de tres tipos de pasto (estrella de África, Guinea y Jaragua) en praderas deterioradas a las cuales se les aplicaron diferentes prácticas culturales (quema, chapeo y aplicación de herbicidas) para su recuperación. El diseño aplicado fue en parcelas divididas, cuya parcela grande (pasto) fue aleatorizada de acuerdo a un diseño de bloques al azar. La razón del bloqueo fue la diferente pendiente del terreno.

Factor A	Estrella de África Guinea Jaragua
Factor B	Quema Chapeo Herbicidas

Tratamientos factoriales

1. Estrella de África con Quema
2. Estrella de África con Chapeo
3. Estrella de África con Herbicidas
4. Guinea con Quema
5. Guinea con Chapeo
6. Guinea con Herbicidas
7. Jaragua con Quema
8. Jaragua con Chapeo
9. Jaragua con Herbicidas

Tratamientos factoriales	Bloques			
	1	2	3	4
1	12	13.5	11	9.8
2	13.5	14.8	10.8	10
3	15	16.3	12.4	10.5
4	10	10.5	8.7	7.6
5	11	11.8	9.6	8.3
6	13	12.5	11.2	13.1
7	7.5	7.1	6.7	6.3
8	8	6.8	7.8	7
9	9	8.3	9.6	7.5

- (a) Escriba el modelo lineal del experimento
- (b) Haga el programa en SAS que realice el análisis correspondiente.
- (c) Si existe interacción significativa, analícela mediante comparaciones múltiples.
- (d) Si no existe interacción significativa, analice el o los efectos principales mediante contrastes.
- (e) Presente gráfica de los efectos principales.
- (f) Concluya en el contexto del problema.

CAPÍTULO 8

INTRODUCCIÓN AL MUESTREO EN LA ACTIVIDAD AGROPECUARIA

Las técnicas de muestreo son utilizadas para conocer las características generales de una población con la finalidad de tomar decisiones de índole socioeconómicas. Por ejemplo, un ecologista requiere conocer la cantidad de individuos de una determinada especie que se encuentran en una asociación vegetal. Un ingeniero agrónomo desea estimar el contenido de una determinada sustancia en las hojas de un árbol o la cantidad de un elemento contaminante presente en un área cercana a una planta industrial.

En la industria el muestreo se usa en control de calidad que se basa en el muestreo de los lotes de producción para determinar si se cumple con la calidad requerida en el mercado.

El principal propósito de este capítulo es introducir al lector en los procedimientos para coleccionar tales muestras y los métodos para analizar los datos derivados del estudio. Si se planea y ejecuta apropiadamente un muestreo, con relativamente pocos individuos, puede proporcionar información relevante acerca de una población constituida por cientos de miles de individuos.

Los estudios de muestreo involucran poblaciones consideradas como finitas, aunque frecuentemente muy grandes, por lo que no se puede considerar en el desarrollo de las técnicas de muestreo el concepto de independencia estadística. Este hecho marca una diferencia con el resto de las técnicas revisadas en esta obra.

Con la finalidad de proporcionar las ideas básicas en los estudios por muestreo, que son comunes en diversos campos de aplicación, se comienza con algunas definiciones para luego pasar a los métodos de muestreo aleatorio simple sin reemplazo, muestreo estratificado y por conglomerados.

8.1. Definiciones básicas

1. Un elemento es un objeto en el cual se observa la característica de interés.
 2. Población. Es la colección de elementos acerca de los cuales se desea hacer alguna inferencia.
 3. Las unidades de muestreo son colecciones no traslapadas de elementos de la población que cubren a la población completa. El número total de unidades de muestreo se denota por N .
1. Marco de muestreo. Es una lista de unidades de muestreo.

5. Muestra. Es una colección de unidades seleccionadas de un marco de muestreo con probabilidades conocidas. A la cantidad seleccionada de unidades de muestreo se le denota por n .
6. Parámetro. Es una característica de la población.
7. Estimador. Es una estadística que es función de las observaciones y no depende de parámetros desconocidos y que una vez evaluada en la muestra proporciona un valor que razonablemente refleja el valor del parámetro desconocido.
8. Error de estimación. Es la diferencia, en valor absoluto, entre el valor del parámetro y el estimador. En símbolos: $|\hat{\phi} - \phi|$.
9. Confiabilidad. Es una probabilidad $(1 - \alpha)$, que especifica la fracción de las veces, en muestreo repetido, en que requerimos que el error de estimación sea menor que un valor fijado por el investigador, digamos d . Esta condición puede ser establecida de la siguiente manera:
- $$P(|\hat{\phi} - \phi| < d) = 1 - \alpha \text{ con } \alpha \in (0,1)$$
10. Muestreo aleatorio irrestricto (MAI). Es aquel en el que el tamaño de muestra n es seleccionado de una población de tamaño N de tal manera que cada muestra posible de tamaño n tiene la misma probabilidad de ser seleccionada.
11. Muestreo sistemático (con inicio aleatorio). Cuando la población se identifica en el marco de un modo de por sí aleatorio, es más fácil obtener la muestra usando muestreo sistemático. En este caso la muestra se trabaja como si hubiera sido extraída por MAI. El muestreo sistemático consiste en dividir la población de N unidades en n subgrupos ordenados y tomar un elemento de cada subgrupo a cada $K = \frac{N}{n}$ unidades a partir de un inicio aleatorio.

Cuando la población está ordenada en relación a los valores de Y_i , con tendencia a que dichos valores cambien paulatinamente, el muestreo sistemático produce varianzas de los estimadores menores que el método MAI. Esto se debe a que la muestra queda más dispersa sobre la población y por lo tanto es más probable que sea representativa. Un ejemplo de esta situación es la que ocurre cuando se van a muestrear ramas de un árbol para evaluar su producción de frutos. Si existe una tendencia de la producción a tener valores mayores en las ramas más bajas, el muestreo sistemático asegura que en la

muestra aparezcan ramas de todas las alturas del árbol.

Otro ejemplo donde sucede esto es en muestreos de viviendas, donde es posible numerar las manzanas o cuadras iniciando en colonias de bajo nivel económico, pasando gradualmente a niveles económicos altos.

Cuando se usa el muestreo sistemático en poblaciones cuyas unidades no siguen un orden aleatorio, no existen ecuaciones válidas para los estimadores y sus varianzas. Asimismo, cuando se usa el muestreo sistemático en poblaciones con tendencia a un cambio gradual, es posible usar las expresiones para el MAI como aproximación, en el entendido de que las varianzas que resultan son mayores que las reales. Si la población sigue un orden que se traduce en cambios periódicos, el muestreo sistemático produce varianzas mayores a las reales. Por ejemplo, cuando se muestrean gramíneas en cultivos en los que ciertas labores se llevan a cabo en ciertas áreas del terreno siguiendo un calendario establecido.

8.2. Planeación de una encuesta

1. Establecimiento de objetivos. Los objetivos de la encuesta deben establecerse de manera clara y concisa.
2. Población objeto. Se debe definir la población de modo tal que no se preste a ambigüedades y además sea factible la obtención de la muestra.
3. El marco de muestreo. Se debe seleccionar el marco de modo tal que la lista de unidades del muestreo y la población objeto concuerden lo más posible con el mínimo de traslapes.
4. Diseño de muestreo. Seleccione el diseño de muestreo y el tamaño de muestra de manera que la muestra proporcione suficiente información para los objetivos del estudio.
5. Método de medición. Los más usuales son: Entrevistas personales, entrevistas por teléfono, cuestionarios enviados por correo electrónico o tradicional u observación directa.
6. Instrumento de medición. Se deben especificar qué mediciones van a ser obtenidas y si se harán en laboratorio se debe especificar la precisión de los instrumentos o el tipo y la calidad de los reactivos.
7. Selección y adiestramiento de los trabajadores de campo. Se debe adiestra a los trabajadores de campo sobre qué mediciones hacer y cómo hacerlas.

8. Prueba piloto. Seleccione una pequeña muestra para una prueba piloto cuya función es probar los instrumentos de medición, calificar a los trabajadores de campo, hacer estimaciones preliminares de la varianza de las observaciones y medir tiempos y costos. Los resultados de la prueba piloto sugieren algunas modificaciones y ajustes antes de realizar el muestreo a escala completa.
9. Análisis de los datos. Defina los análisis que deben realizarse. Se debe hacer un listado de los temas que serán incluidos en el reporte final, este punto ayuda en los aspectos a ser medidos en la encuesta.

8.3. Usando una tabla de números aleatorios

Antes de abordar las diferentes técnicas de muestreo, en esta sección se explica el procedimiento para extraer una muestra aleatoria sin reemplazo. Partiendo de un marco de muestreo, de una población de interés, se tienen números del 1 a N asociados con cada unidad de muestreo y también se pueden numerar pequeñas bolas del 1 al N . Estas bolas se colocan en una urna, se mezclan muy bien y se procede a extraer una a la vez, hasta que se hayan seleccionado n de ellas, si n es el tamaño de muestra deseado. Las unidades de muestreo que correspondan a los números seleccionados son entonces incluidas en la muestra, y las características de interés de éstas son entonces medidas y registradas.

Si la población es muy grande, este método de selección aleatoria se vuelve poco práctico. Esto conduce a considerar el uso de tablas de números aleatorios. La Tabla H del Apéndice contiene 5000 dígitos aleatorios. Idealmente, estos números son generados por un mecanismo tal que cada dígito es el resultado de un ensayo que consiste de

extraer un número de entre los dígitos: 0, 1, ..., 9 con igual probabilidad de $\frac{1}{10}$; cada dígito de la tabla es el resultado de repeticiones independientes de tal ensayo. Para ilustrar este mecanismo, supóngase que se colocan en una urna 10 bolas idénticas numeradas con los dígitos: 0, 1, ..., 9. Después de mezclar perfectamente las bolas se extrae una y se registra su número. La bola se regresa a la urna y se repite el procedimiento. Sin embargo, debido a consideraciones prácticas, las tablas de números aleatorios se generan por rutinas de computadora que simulan muy cercanamente el procedimiento explicado y se checa el cumplimiento de independencia e igual probabilidad.

Lo anterior asegura que cualquier dígito de la tabla tiene la misma probabilidad $\frac{1}{10}$ de ocurrir; que cualquier par de dígitos: 00, 01, ..., 99 tienen la misma probabilidad de $\frac{1}{100}$

de ocurrir; etc. ¿Cómo se puede extraer una muestra aleatoria de una población finita utilizando esta tabla?

Ejemplo 8.1. Para ilustrar su uso supóngase que se desea muestrear una población de $N = 40$ plantas que se encuentran en un invernadero, para lo cual se decide tomar una muestra de $n = 5$ para estudiar su estado fitosanitario. El primer paso consiste en numerar del 1 al 40 a las plantas, en la práctica es posible considerar el orden de colocación de cada unidad de muestreo asignando el número 1 a la primera, el 2 a la segunda, etc. En la tabla se deben seleccionar pares de dígitos ya que el tamaño de la población ($N = 40$) es un número de dos dígitos. Se debe empezar por seleccionar arbitrariamente una página, una hilera y una columna de la Tabla H. Supóngase que se selecciona la hilera 26 y la columna 19. Luego se procede a leer los pares de dígitos de las columnas 19 y 20,

74 53 87 21 37 24 59 54 42 86 41 04 79 46 51 04 49 74 96 71
70 43 27

Se ignoran los números mayores que 40 y también cualquier número, cuando éste aparece por segunda ocasión, como es el caso del 04 en este ejemplo. Se debe continuar leyendo pares de dígitos hasta obtener los cinco requeridos

21 37 24 04 27

Las plantas que corresponden a los números obtenidos son las que se revisan para registrar su estado fitosanitario.

Cuando se requieren tamaños de muestra grandes o el trabajo de selección es frecuente, se recomienda el uso de generadores de números aleatorios que están implementados en la mayoría de las aplicaciones estadísticas en computadora.

8.4. Muestreo aleatorio simple sin reemplazo (o muestreo aleatorio irrestricto MAI)

Este es el diseño de muestreo más usado cuando se cuenta con un marco de muestreo que identifica cada unidad de la población y no se cuenta con un conocimiento previo sobre los posibles valores de Y_i ni otras mediciones asociadas a las mismas. En este método de muestreo las unidades se extraen con igual probabilidad, por etapas y sin reemplazo, hasta obtener las n unidades de la muestra. La media poblacional definida

por $\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^N Y_i}{N}$ se estima utilizando los valores de la muestra mediante, $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$ este es un estimador insesgado (significa que el promedio de los posibles valores

al tomar muchas muestras es \bar{Y}). Además, su varianza es $V(\bar{y}) = (1 - \frac{n}{N}) \frac{S_y^2}{n}$; donde

$S_y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2$. Si N es infinito, entonces $V(\bar{y}) = \frac{S_y^2}{n}$. A la cantidad $\frac{n}{N}$ se le denomina fracción de muestreo o proporción de la población que se muestrea.

8.4.1. Tamaño de muestra para estimar \bar{Y} con MAI

El valor de S_y^2 se estima con una prueba piloto utilizando la siguiente ecuación:

$$s^2 = \frac{1}{n_o - 1} \left[\sum_{i=1}^{n_o} y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n_o} y_i)^2}{n_o} \right], \text{ donde } n_o \text{ es el tamaño de la muestra en la prueba piloto.}$$

Si se considera que \bar{y} no se ajusta a la distribución normal, se usa el criterio de fijar la magnitud de la varianza o del coeficiente de variación de \bar{y} . Se determina n de tal manera que produzca un coeficiente de variación dado (CV_o) usando estimaciones preliminares de \bar{Y} y de S_y^2 .

Así $CV_o = \frac{[V(\bar{y})]^{1/2}}{\bar{Y}} = \frac{\left[\left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{S_y^2}{n} \right]^{1/2}}{\bar{Y}}$ de donde despejando n se obtiene:

$$n = \frac{S_y^2}{(CV_o)^2 \bar{Y}^2 + \frac{S_y^2}{N}} \dots \dots \dots (8.1)$$

Si n es grande se espera que el Teorema Central del Límite dé una buena aproximación

de la distribución de \bar{y} . Así $\bar{y} \sim N(\bar{Y}, V(\bar{y}))$, entonces $\frac{\bar{y} - \bar{Y}}{[V(\bar{y})]^{1/2}} \sim$ Aproximadamente

$N(0,1)$.

Si se desea un tamaño de muestra tal que el error de estimación sea inferior a δ con una probabilidad de $(1 - \alpha)$, esto es:

$$P[|\bar{y} - \bar{Y}| < \delta] = 1 - \alpha$$

Dividiendo entre $[V(\bar{y})]^{1/2}$ se tiene,

$$P\left(\frac{|\bar{y} - \bar{Y}|}{[V(\bar{y})]^{1/2}} < \frac{\delta}{[V(\bar{y})]^{1/2}}\right) = 1 - \alpha, \text{ de las tablas de la normal estándar, } Z \sim N(0,1), \text{ se}$$

obtiene el valor $z_{\alpha/2}$ tal que $P[Z < z_{\alpha/2}] = 1 - \alpha$. Como $\frac{|\bar{y} - \bar{Y}|}{[V(\bar{y})]^{1/2}} \sim N(0,1)$ se puede

establecer la igualdad,
$$z_{\alpha/2} = \frac{\delta}{[V(\bar{y})]^{1/2}} = \frac{\delta}{\sqrt{\frac{S_y^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}}$$
, de esta expresión se despeja

n y se obtiene,

$$n = \frac{S_y^2 N z_{\alpha/2}^2}{\delta^2 N + S_y^2 z_{\alpha/2}^2} \dots\dots\dots (8.2)$$

Nótese que si la fracción: $\frac{n}{N} < 0.10$; entonces:

$$n' = \frac{S_y^2 z_{\alpha/2}^2}{\delta^2} \dots\dots\dots (8.3)$$

La ecuación (8.3) se utiliza como una primera aproximación y luego se corrige usando

$$n = \frac{n'}{1 + \frac{n'}{N}}$$

8.4.2. Tamaño de muestra para estimar el total

Si n es grande entonces $y = \sum_{i=1}^n y_i \sim N(Y, V(y))$; donde $V(y) = N^2 \frac{S_y^2}{n} (1 - \frac{n}{N})$ de modo que si se quiere que $P(|y - Y| < \delta) = 1 - \alpha$; dividiendo entre $[V(y)]^{1/2}$ se tiene

$$P\left\{ \frac{|y - Y|}{[V(y)]^{1/2}} < \frac{\delta}{[V(y)]^{1/2}} \right\} = 1 - \alpha$$

De las tablas de la normal estándar, $Z \sim N(0,1)$ se obtiene el valor $z_{\alpha/2}$ tal que $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$. Como $\frac{|y - Y|}{[V(y)]^{1/2}} \sim N(0,1)$ se puede establecer la igualdad

$$z_{\alpha/2} = \frac{\delta}{[V(y)]^{1/2}} = \frac{\delta}{\sqrt{N^2 \frac{S_y^2}{n} (1 - \frac{n}{N})}}$$

de esta expresión se despeja n y se tiene

$$n = \frac{N^2 S_y^2 z_{\alpha/2}^2}{\delta^2 + N S_y^2 z_{\alpha/2}^2} \dots\dots\dots(8.4)$$

Nótese que si la fracción: $\frac{n}{N} < 0.10$, entonces

$$n = \frac{N^2 z_{\alpha/2}^2 S_y^2}{\delta^2} \dots\dots\dots(8.5)$$

8.4.3. Tamaño de muestra para estimar una proporción

Si se tiene el conocimiento de estudios preliminares o por experiencia de que la proporción a estimar toma valores en el rango $(0.35 < P < 0.65)$, entonces para $n \geq 30$ se invoca al teorema central del límite y el tamaño de muestra se obtiene al sustituir el valor de

S_y^2 por $NP(1-P)\frac{1}{N-1}$ en la ecuación (8.2). El valor de P se estima en una prueba piloto mediante la siguiente ecuación:

$$p = \frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^{n_0} y_i$$
 donde los valores de y_i solo pueden ser 0 ó 1, es decir y_i es una variable con distribución binomial y n_0 es el tamaño de la muestra en la prueba piloto.

Si se sabe que $P \notin (0.35, 0.65)$; entonces el estimador de P no tiene distribución normal aun para muestras grandes. Por tal motivo, el tamaño de muestra se obtiene mediante la ecuación (8.1) al fijar un valor para el CVo y sustituir el valor de $\bar{Y} = P$ y

$S_y^2 = NP(1-P)\frac{1}{N-1}$ dando lugar a la ecuación

$$n = \frac{\frac{N}{N-1}(1-P)}{(CVo)^2 P + \frac{1-P}{N-1}} \dots \dots \dots (8.6)$$

Si la fracción $\frac{n}{N} < 0.10$, la ecuación (8.6) se puede escribir

$$n = \frac{1-P}{P(CVo)^2} \dots \dots \dots (8.7)$$

8.5. Muestreo estratificado

Supóngase que la población de interés está formada por N unidades elementales heterogéneas; entonces haciendo uso de una variable auxiliar es posible definir L grupos de unidades o estratos que constituyen una partición, en los que las unidades son más

homogéneas entre sí. De manera formal se puede decir que en el muestreo estratificado, una población heterogénea con N unidades $\{u_i\}_{i=1,2,\dots,N}$ se subdivide en L subpoblaciones disjuntas lo más homogéneas posible (que forman una partición) de tamaños N_1, N_2, \dots, N_L , denominadas estratos.

Cada estrato se muestrea por separado y se obtienen los estimadores de los parámetros (totales, medias, proporciones, etc.) para cada estrato. Se asume que se conoce el número de unidades en cada estrato N_h . El efecto de la formación de estratos es la de reducir la variabilidad de los estimadores. La variabilidad se puede reducir mucho si los estratos son muy homogéneos entre sí.

Si por ejemplo se quiere estimar la cosecha de un determinado cultivo, las variables auxiliares pueden ser: el estado fisiológico, edad y estado fitosanitario de las plantas o árboles, ya que estas características influyen mucho en su producción. Entonces se toman como estratos categorías de cultivos o árboles bien definidos y homogéneos en lo que respecta a edad, estado fisiológico y sanidad. Además, los predios se agrupan en estratos de acuerdo a la región ecológica donde se encuentran. Lo anterior se debe a que la productividad de los cultivos varía según las condiciones ecológicas como son: altura sobre el nivel del mar, vientos, temperaturas extremas, etc.

Otra razón para constituir estratos puede ser el costo de localizar y levantar la información de las unidades; por ejemplo, si en una encuesta de predios hay una región cuyo acceso es difícil, esta región puede constituirse en un estrato.

A continuación se expone el procedimiento que debe seguirse suponiendo que cada estrato se muestrea usando MAI. La notación preliminar se expone enseguida.

N_h = Número de unidades en el estrato h -ésimo. $h = 1, 2, 3, \dots, L$

L = número de estratos.

$N = \sum_{h=1}^L N_h$ Total de unidades en la población.

\bar{Y}_h = Media poblacional del estrato h -ésimo.

Y_h = Total poblacional en el estrato h -ésimo.

$S_h^2 =$ Varianza poblacional del estrato h-ésimo.

La media del estrato h-ésimo tiene la siguiente expresión;

$$\bar{Y}_h = \frac{\sum_{i=1}^{N_h} Y_{hi}}{N_h} \text{ con } Y_{hi} \text{ valor de la medición en la unidad } i\text{-ésima del estrato } h\text{-ésimo.}$$

El total del estrato h-ésimo tiene la siguiente expresión:

$$Y_h = \sum_{i=1}^{N_h} Y_{hi}$$

La varianza del estrato h-ésimo tiene la siguiente expresión:

$$S_h^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N_h} (Y_{hi} - \bar{Y}_h)^2}{N_h - 1}$$

Supóngase que de manera independiente se toman muestras de cada estrato. Sea n_h el tamaño de muestra en el estrato h-ésimo. El tamaño de muestra total es

$$n = \sum_{h=1}^L n_h$$

Si se quiere estimar el total de la población, esto es,

$$Y = \sum_{h=1}^L Y_h = \sum_{h=1}^L \sum_{i=1}^{N_h} Y_{hi}$$

Para hacer la estimación con la muestra de cada estrato se estima el total, sea \hat{Y}_h el estimador insesgado del total en el estrato h-ésimo; su varianza es $V(\hat{Y}_h)$ y el estimador de esa varianza se denota por $\hat{V}(\hat{Y}_h)$.

El estimador del total \hat{Y} es $\hat{Y} = \sum_{h=1}^L \hat{Y}_h$ que es un estimador insesgado.

La varianza del estimador del total es $V(\hat{Y}) = \sum_{h=1}^L V(\hat{Y}_h)$ la suma de las varianzas de los estimadores del total en cada estrato (por ser muestras independientes).

El estimador de la varianza del estimador del total es:

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \sum_{h=1}^L \hat{V}(\hat{Y}_h)$$

Si se usa MAI, $\hat{Y}_h = N_h \bar{Y}_h = N_h \frac{\sum_{i=1}^{n_h} y_{hi}}{n_h}$. Donde y_{hi} son los valores observados en la unidad i -ésima de la muestra con tamaño n_h del estrato h -ésimo.

El estimador del total poblacional es:

$$\hat{Y} = \sum_{h=1}^L \hat{Y}_h = \sum_{h=1}^L N_h \bar{y}_h \dots\dots\dots(8.8)$$

Su varianza teórica es:

$$V(\hat{Y}) = \sum_{h=1}^L V(\hat{Y}_h) = \sum_{h=1}^L N_h^2 V(\bar{y}_h) = \sum_{h=1}^L N_h^2 \left(1 - \frac{n_h}{N_h}\right) \frac{S_h^2}{n_h} \dots\dots\dots(8.9)$$

Esta varianza se estima después de estimar S_h^2 en cada estrato. Para esto se usa el estimador de la varianza, es decir,

$$s_h^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_h} (y_{hi} - \bar{y}_h)^2}{n_h - 1}, \text{ el estimador insesgado de } S_h^2$$

El estimador de la varianza del total queda

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \sum_{h=1}^L \hat{V}(\hat{Y}_h) = \sum_{h=1}^L N_h^2 \hat{V}(\bar{y}_h) = \sum_{h=1}^L N_h^2 \left(1 - \frac{n_h}{N_h}\right) \frac{s_h^2}{n_h} \dots\dots\dots(8.10)$$

Al comparar las ecuaciones (8.9) y (8.10) se nota que s_h^2 es la misma expresión que S_h^2 ; pero la primera es con los valores de la muestra y la segunda con los valores de todo el estrato h-ésimo.

Al invocar el teorema central del límite, para cada estrato se tiene

$$\bar{y}_n \sim N[\bar{Y}_n, V(\bar{y}_h)]$$

$$\hat{Y} \sim N[Y, V(\hat{Y})]$$

Si se estima $V(\hat{Y})$ mediante la ecuación (8.10), se puede construir un intervalo de confianza aproximado para el total de la población.

$$P\left(\hat{Y} - 1.96\sqrt{\hat{V}(\hat{Y})} < Y < \hat{Y} + 1.96\sqrt{\hat{V}(\hat{Y})}\right) = 0.95 \dots\dots\dots(8.11)$$

Si se desea estimar el promedio de la característica \bar{Y} , se tiene que,

$$\hat{Y} = \frac{\hat{Y}}{N} = \frac{\sum_{h=1}^L N_h \bar{y}_h}{N} = \sum_{h=1}^L \frac{N_h}{N} \bar{y}_h = \sum_{h=1}^L W_h \bar{y}_h \dots\dots\dots(8.12)$$

Donde $W_h = \frac{N_h}{N}$ proporción del tamaño del estrato h-ésimo. Nótese que (8.12) es un promedio ponderado de los promedios muestrales.

El estimador de la varianza del estimador de la media poblacional es,

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left(1 - \frac{n_h}{N_h}\right) \frac{s_h^2}{n_h} \dots\dots\dots(8.13)$$

El intervalo de confianza aproximado para \bar{Y} es:

$$P\left(\hat{\bar{Y}} - 1.96\sqrt{\hat{V}(\hat{\bar{Y}})} < \bar{Y} < \hat{\bar{Y}} + 1.96\sqrt{\hat{V}(\hat{\bar{Y}})}\right) = 0.95 \dots\dots\dots(8.14)$$

Si se desea estimar la proporción de elementos de la población que tienen una característica determinada (P), se usan las equivalencias dadas por: $Y = P$, $Y_h = p_h$

$$\hat{P} = \sum_{h=1}^L W_h p_h$$

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \hat{V}(\hat{P}) = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left(1 - \frac{n_h}{N_h}\right) \frac{p_h(1-p_h)}{n_h}$$

El intervalo de confianza aproximado para P es,

$$P\left(\hat{P} - 1.96\sqrt{\hat{V}(\hat{P})} < P < \hat{P} + 1.96\sqrt{\hat{V}(\hat{P})}\right) = 0.95 \dots\dots\dots(8.15)$$

Las anteriores equivalencias surgen al considerar que Y_{hi} toma solo valores 0 y 1; 1 si la unidad i -ésima tiene la característica, 0 si no la tiene.

Antes de abordar el problema de la determinación del tamaño de muestra, se presenta la forma de distribuir el tamaño de muestra total, n , a los diferentes estratos.

8.5.1. Distribución afijación de la muestra a los estratos

El término afijación de la muestra se refiere al reparto, asignación o distribución del tamaño de muestra n entre los diferentes estratos; esto es, a la determinación de los valores de n_h que verifiquen $n_1 + n_2 + \dots + n_L = n$. Pueden establecerse varias afijaciones o maneras de repartir la muestra entre los estratos a saber: afijación uniforme, afijación proporcional, afijación óptima y afijación de varianza mínima.

Afijación uniforme

Consiste en asignar el mismo tamaño de muestra a cada estrato, de manera que se tomarán todos los n_h iguales a $\frac{n}{L}$, aumentando o disminuyendo este tamaño en una unidad si n no fuese múltiplo de L , esto es, $n_h = E\left(\frac{n}{L}\right) + 1$; donde E denota la parte entera.

$$n_h = k \quad \forall h = 1, 2, \dots, L \Rightarrow \sum_{h=1}^L n_h = \sum_{h=1}^L k \Rightarrow n = L \times k \Rightarrow \frac{n_h}{N_h} = \frac{k}{N_h}$$

Este tipo de afijación da la misma importancia a todos los estratos, en cuanto al tamaño de muestra, con lo que se favorece a los estratos de menor tamaño y perjudica a los grandes en cuanto a precisión. Solo se recomienda en poblaciones con estratos de tamaño similar.

Afijación proporcional

Consiste en asignar a cada estrato un tamaño de muestra proporcional a su tamaño. Las n unidades de la muestra se distribuyen proporcionalmente en los tamaños de los estratos N_h .

Se busca que se cumpla la relación:

$$\frac{n_h}{n} = \frac{N_h}{N}$$

de esta relación se tiene:

$$n_h = n \frac{N_h}{N} = nW_h \dots\dots\dots(8.16)$$

Esta distribución de la muestra total se usa cuando no se tiene información sobre la magnitud de las S^2_h o que las S^2_h sean semejantes. También se usa cuando los costos de muestrear las unidades en los diferentes estratos son semejantes. Asimismo, se emplea cuando el muestreo va a determinar varias características (varias mediciones) en cada unidad de la población.

Afijación óptima

Este procedimiento se emplea cuando se tienen costos muy diferentes para el muestreo de unidades en los diferentes estratos. Si C_h denota el costo para obtener información de una unidad en el estrato h -ésimo, el costo total será:

$$C = C_0 + \sum_{h=1}^L C_h n_h \dots \dots \dots (8.17)$$

Donde C_0 es el costo de administración general.

La minimización de la varianza del estimador (8.9) con costo fijo (8.17) produce la distribución óptima que es:

$$n_h = n \frac{N_h S_h}{\sqrt{C_h}} \left[\sum_{h=1}^L \frac{N_h S_h}{\sqrt{C_h}} \right]^{-1} \dots \dots \dots (8.18)$$

Afijación de mínima varianza

La afijación de mínima varianza consiste en determinar los valores de n_h de manera que para un tamaño de muestra fijo igual a n la varianza de los estimadores sea mínima. La expresión para n_h es:

$$n_h = n \frac{N_h S_h}{\sum_{h=1}^L N_h S_h} = n \frac{\frac{N_h}{N} S_h}{\sum_{h=1}^L \frac{N_h}{N} S_h} = n \frac{W_h S_h}{\sum_{h=1}^L W_h S_h} \dots \dots \dots (8.19)$$

Se puede observar que los valores de n_h son proporcionales a los productos $N_h \times S_h$ y bajo el supuesto de que $S_h = S, \forall h = 1, 2, \dots, L$ esta afijación de mínima varianza coincide con la afijación proporcional.

La utilidad de esta afijación es mayor si hay grandes diferencias en la variabilidad de los estratos. Si esto no sucede, entonces es preferible usar la afijación proporcional.

8.5.2. Tamaño de muestra para estimar el total Y

Si se desea calcular el valor de n que produce la mínima varianza para un costo total fijo C_0 , se debe usar la siguiente expresión que utiliza la distribución óptima,

$$n = \frac{(C - C_0) \times \left[\frac{\sum_{h=1}^L N_h S_h}{C_h} \right]}{\sum_{h=1}^L N_h S_h} \dots\dots\dots(8.20)$$

Las desviaciones estándar de cada estrato S_h se deben obtener con base en muestreo piloto en cada estrato.

Si lo que se requiere es encontrar el valor de n que produce el costo mínimo para una varianza dada V_0 , se puede usar:

$$n = \frac{\sum_{h=1}^L N_h S_h \sqrt{C_h} \left[\sum_{h=1}^L \frac{N_h S_h}{\sqrt{C_h}} \right]}{V_0 + \sum_{h=1}^L N_h S_h^2} \dots\dots\dots(8.21)$$

Donde V_0 es la varianza fija para el estimador del total Y.

8.5.3. Tamaño de muestra para estimar un promedio \bar{y}

El tamaño de muestra para estimar un promedio considerando el criterio de varianza mínima para un costo total fijo C_0 se puede obtener mediante la ecuación (8.20). La expresión para obtener el tamaño de muestra que produce el costo mínimo para una varianza dada, V_0 , sufre una pequeña modificación con respecto a la expresión (8.21) quedando:

$$n = \frac{\sum_{h=1}^L \frac{N_h}{N^2} S_h \sqrt{C_h} \left[\sum_{h=1}^L \frac{N_h S_h}{\sqrt{C_h}} \right]}{V_0 + \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^L N_h S_h^2} \dots\dots\dots (8.22)$$

Donde V_0 es la varianza fija para el estimador de \bar{Y} .

8.5.4. Tamaño de muestra cuando se va a usar distribución proporcional

En distribución proporcional se puede recurrir a la expresión de la varianza que es:

$$V(\hat{Y}) = \sum_{h=1}^L N_h^2 \left(1 - \frac{n_h}{N_h}\right) \frac{S_h^2}{n_h} = \sum_{h=1}^L \frac{N_h^2}{n_h} S_h^2 - \sum_{h=1}^L N_h S_h^2 \dots\dots\dots (8.23)$$

Si se sustituye $n_h = \frac{N_h}{N} \times n$ se obtiene:

$$V(\hat{Y}) = \frac{N}{n} \sum_{h=1}^L N_h S_h^2 - \sum_{h=1}^L N_h S_h^2 \dots\dots\dots (8.24)$$

Si se requiere un coeficiente de variación fijo CV_0 , sin tomar en cuenta el tipo de distribución del estimador \hat{Y} , se tiene

$$CV_0 = \frac{\sqrt{V(\hat{Y})}}{\hat{Y}} \therefore (CV_0)^2 \hat{Y}^2 = V(\hat{Y}) = \frac{N}{n} \sum_{h=1}^L N_h S_h^2 - \sum_{h=1}^L N_h S_h^2$$

De donde

$$n = \frac{N \sum_{h=1}^L N_h S_h^2}{\hat{Y}^2 (CV_0)^2 + \sum_{h=1}^L N_h S_h^2} \dots\dots\dots (8.25)$$

\hat{Y} es una estimación aproximada del total

8.5.5. Tamaño de muestra para estimar el total Y considerando distribución normal

Si se considera que $\hat{Y} \sim N[Y, V(\hat{Y})]$ y se desea tener:

$$P[|\hat{Y} - Y| < \delta] = 1 - \alpha, \quad P\left\{ \frac{|\hat{Y} - Y|}{[V(\hat{Y})]^{1/2}} \leq \frac{\delta}{[V(\hat{Y})]^{1/2}} \right\} = 1 - \alpha$$

Esto es $P[|Z| < Z_{\alpha/2}] = 1 - \alpha$. De aquí se tiene que

$$Z_{\alpha/2} = \frac{\delta}{[V(\hat{Y})]^{1/2}}$$

$$\frac{\delta^2}{Z_{\alpha/2}^2} = V(\hat{Y}) = \frac{N}{n} \sum_{h=1}^L N_h S_h^2 - \sum_{h=1}^L N_h S_h^2 \quad \text{Despejando a } n \text{ se obtiene:}$$

$$n = \frac{N \sum_{h=1}^L N_h S_h^2}{\frac{\delta^2}{Z_{\alpha/2}^2} + \sum_{h=1}^L N_h S_h^2} \dots\dots\dots(8.26)$$

8.5.6. Tamaño de muestra para estimar la media \bar{Y} considerando distribución normal

En este caso se parte de la ecuación:

$$\frac{\delta^2}{Z_{\alpha/2}^2} = V(\hat{Y}) = \frac{1}{N^2} V(\hat{Y}) = \frac{1}{nN} \sum_{h=1}^L N_h S_h^2 - \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^L N_h S_h^2$$

De donde se obtiene la expresión para n .

$$n = \frac{\frac{1}{N} \sum_{h=1}^L N_h S_h^2}{\frac{\delta^2}{Z^2_{\alpha/2}} + \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^L N_h S_h^2} \dots\dots\dots(8.27)$$

Nótese que todas las expresiones anteriores obtienen el tamaño de muestra para estimadores de toda la población. Las inferencias no son para cada estrato con esas muestras. Si lo que se desea es estimar medias o totales de cada estrato, las expresiones anteriores no se deben utilizar, lo que se debe emplear son las ecuaciones (8.1) y (8.2) para calcular el tamaño de muestra para cada estrato por separado y así determinar las n_h a usarse en cada estrato. Por supuesto que en este último caso la muestra total n es mucho más grande. Esto es de esperarse, puesto que se hacen inferencias por separado para L poblaciones.

8.6. Muestreo por conglomerados

Tanto en el muestreo aleatorio simple, así como en el muestreo estratificado y sistemático, las unidades de muestreo son las mismas que las unidades objeto del estudio. Sin embargo, en la práctica no siempre se cuenta con un marco para las unidades de la población y el costo de construirlo es prohibitivo. Además, en ocasiones el costo del muestreo se incrementa por la dispersión de las unidades siendo más económico obtener la muestra de unidades menos dispersas, dando lugar así al muestreo por conglomerados.

En el muestreo por conglomerados no se requiere un marco específico como en el caso de MAI en el que es necesario disponer de un listado de unidades de la población, o como en el muestreo estratificado, donde es necesario disponer de listados de unidades por estratos. En este diseño de muestreo, se divide previamente la población objeto en conglomerados o áreas convenientes (unidades de primera etapa), de las cuales se selecciona un cierto número para la muestra, debido a lo anterior, se requiere un marco de conglomerados que es más económico de construir. Es común que se use como unidades de primera etapa a divisiones territoriales o áreas geográficas cuyas características están bien establecidas.

En el muestreo por conglomerados suele tenerse menor precisión en las estimaciones ya que, en general, este muestreo produce cierto grado de homogeneidad inevitable

dentro de los conglomerados. Por otro lado, la eficiencia disminuye al aumentar el tamaño de los conglomerados, siendo que este tipo de muestreo es más útil en caso de poblaciones muy grandes y dispersas en las que se pueden construir conglomerados grandes.

Ejemplo 8.2. Supóngase que se desea investigar el contenido de calcio en los frutos maduros de cierto tipo de árboles frutales en una plantación. La población es el total de frutos maduros que se encuentran en los árboles que constituyen la plantación. En este caso no hay una lista de frutos en la que se base la selección aleatoria. Para remediar esta situación se pueden formar unidades primarias de muestreo o unidades de primera etapa. Así, las unidades de primera etapa serían los árboles, de los cuales si se puede tener un marco; entonces se selecciona una muestra de cierto número de árboles utilizando MAI, considerando una población de árboles y de cada árbol se selecciona al azar una cierta cantidad de frutos maduros. Para ello se debe construir previamente una lista (marco) de frutos maduros para cada árbol seleccionado en la primera etapa.

Ejemplo 8.3. Otro caso clásico de muestreo por conglomerados, se presenta en los estudios agronómicos cuyo objetivo es estimar la producción de granos o de productos pecuarios, en los que las unidades de primera etapa son los municipios y las de segunda etapa son los predios.

El muestreo por conglomerados también se puede combinar con muestreo estratificado. Por ejemplo, para los casos señalados antes, los árboles se pueden agrupar por edad o aspecto semejante. Los municipios se pueden agrupar por su grado de desarrollo socioeconómico.

El principio básico para construir estimadores y sus varianzas es considerar el muestreo de unidades secundarias dentro de cada unidad primaria mediante el MAI. Después, se usan los estimadores para cada unidad primaria muestreada, al considerar un MAI de unidades primarias.

La notación es la siguiente:

Valores poblacionales:

N = número de unidades primarias.

M_i = número de unidades secundarias en la unidad primaria i -ésima.

Y_{ij} = valor de la medición en la unidad secundaria j -ésima de la unidad primaria i -ésima.

Y_i = total de la unidad primaria i-ésima, $Y_i = \sum_{j=1}^{M_i} Y_{ij}$

\bar{Y}_i = Promedio de la unidad primaria i-ésima.

$$\bar{Y}_i = \frac{Y_i}{M_i} = \frac{\sum_{j=1}^{M_i} Y_{ij}}{M_i}$$

Y = total de la población

$$Y = \sum_{i=1}^N Y_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} Y_{ij}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^N Y_i}{N} = \text{promedio de los totales de unidades primarias.}$$

$$S_{wi}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{M_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2}{M_i - 1} = \text{Varianza de unidades secundarias dentro de unidad primaria } i\text{-ésima.}$$

$$S_b = \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2}{N - 1} = \text{Varianza entre totales de unidades primarias.}$$

Muestras y estimadores:

n = unidades primarias en la muestra.

m_i = número de unidades secundarias muestreadas de la unidad primaria i-ésima.

$\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}}{m_i}$ = promedio de la muestra de unidades secundarias de la unidad primaria i-ésima.

$$s_{wi} = \frac{\sum_{j=1}^{m_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{m_i - 1} = \text{varianza estimada entre unidades secundarias.}$$

$\hat{Y} = M_i \bar{y}_i$ = total estimado de unidad primaria i-ésima.

$$\hat{Y} = \frac{N}{n} \sum_{i=1}^n M_i \bar{y}_i = N \frac{\sum_{i=1}^n \hat{Y}_i}{n} = \text{total estimado para la población.....(8.28)}$$

$s^2_b = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(M_i \bar{Y}_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i \bar{y}_i \right)^2$ = varianza estimada de los totales de las unidades primarias.

$$V(\hat{Y}) = N^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N} \right) S^2_b + \frac{N}{n} \sum_{i=1}^n M_i^2 \left(\frac{1}{m_i} - \frac{1}{M_i} \right) S^2_{wi} = \text{la varianza teórica del estimador del total.(8.29)}$$

Esta varianza se estima mediante:

$$V(\hat{Y}) = N^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N} \right) s^2_b + \frac{N}{n} \sum_{i=1}^n M_i^2 \left(\frac{1}{m_i} - \frac{1}{M_i} \right) s^2_{wi} \text{(8.30)}$$

Así, una estimación aproximada por intervalo al 95% para el total Y será

$$P \left[\hat{Y} - 1.96 \sqrt{\hat{V}(\hat{Y})} < Y < \hat{Y} + 1.96 \sqrt{\hat{V}(\hat{Y})} \right] = 0.95 \text{(8.31)}$$

Un caso práctico de mucha importancia es cuando las muestras de unidades secundarias en cada unidad primaria son del mismo tamaño $m_i = m$. Si además $M_i = M$, las unidades primarias tienen el mismo número de unidades secundarias, se tiene:

$$\hat{Y} = \frac{N}{n} \times \frac{M}{m} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M y_{ij} \quad S_w^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_{wi}^2$$

$$V(\hat{Y}) = N^2 S_b^2 \frac{1}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right) + N^2 M^2 \frac{S_w^2}{mn} \left(1 - \frac{m}{M}\right) \dots \dots \dots (8.32)$$

Si en este caso se considera que el costo de localizar y hacer el listado de las unidades secundarias que contiene una unidad primaria es C_1 y el de obtener información sobre una unidad secundaria es C_2 , el costo total es:

$$C = nC_1 + nmC_2$$

De aquí, los valores de n y m óptimos que minimizan $V(\hat{Y})$ (expresión 8.32) manteniendo el costo fijo C_0 , son:

$$m = MS_w \frac{\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}}{(S_b^2 - MS_w^2)^{1/2}} \dots \dots \dots (8.33)$$

Con el valor de m , se obtiene el de n :

$$n = \frac{C_0}{C_1 + C_2 m} \dots \dots \dots (8.34)$$

Nótese que para estimar el promedio de toda la población $\bar{Y}_e = \frac{Y}{\sum_{i=1}^N M_i}$ es necesario el conocimiento de los valores M_i para todas las unidades; esto no siempre es factible,

por lo que se debe usar el llamado «estimador de razón».

8.7. Estimadores de razón

Los estimadores de razón son métodos indirectos que aprovechan la información conocida relativa a una variable auxiliar X correlacionada con la variable que se estudia Y para obtener estimaciones más precisas para Y que las calculadas únicamente a partir del muestreo de la variable de interés.

En la población $P = \{u_1, u_2, \dots, u_N\}$ se determinan dos mediciones para cada unidad $y(u_i) = Y_i$ y $X(u_i) = X_i$, además los valores de X_i son conocidos. En este caso los valores de X_i forman parte del marco. Se supone que existe el valor desconocido

$$R = \frac{\sum_{i=1}^N Y_i}{\sum_{i=1}^N X_i} = \frac{Y}{X} = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$$

Un estimador de Y , con base en una muestra donde se determinan pares de valores $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_n, y_n)\}$ es:

$$\hat{Y} = X \times \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n x_i} = X\hat{R} \dots \dots \dots (8.35)$$

Un estimador de la media está dado por: $\frac{\hat{Y}}{N}$

Hay ocasiones en donde las X_i no se conocen y, sin embargo, se quiere estimar R ; entonces se usa $\hat{R} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$

Los dos casos: conocer las X_i y usarlas para estimar el valor desconocido de Y o \bar{Y} o no

conocer las X_i pero querer estimar R , se basan en los mismos desarrollos teóricos.

El estimador de R , con base a una muestra obtenida por MAI es:

$$\hat{R} = \frac{\sum y_i}{\sum x_i} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$$

Y resulta ser sesgado. El promedio de los posibles valores de \hat{R} al repetir muchas veces el muestreo no es R . Sin embargo, sí está bastante cerca de R . Si se denota por $E(\hat{R})$ el valor del promedio señalado, se tendrá la siguiente desigualdad

$$|E(\hat{R}) - R| \leq CV(\bar{X}) \times [V(\hat{R})]^{1/2}$$

O bien
$$\frac{|E(\hat{R}) - R|}{[V(\hat{R})]^{1/2}} \leq CV(\bar{X})$$

El lado izquierdo es el sesgo de \hat{R} dividido entre su desviación estándar. El lado derecho es el coeficiente de variación de \bar{X} . De manera que lo que se hace usualmente es tomar la muestra de modo que $CV(\bar{X})$ sea pequeño. Un valor frecuente es hacer que $CV(\bar{X})$ sea de 0.10 o menor. En este caso el tamaño de muestra se obtiene de:

$$CV(\bar{X}) = 0.1 = \frac{\left[\left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{S^2_x}{n} \right]^{1/2}}{\bar{X}} = \frac{\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{1/2} \times S_x}{\bar{X}}, \text{ De donde}$$

$$n = \frac{1}{\frac{(0.1)^2 \bar{X}^2}{S^2_x} + \frac{1}{N}} \dots \dots \dots (8.36)$$

En la estimación de Y , mediante $\hat{Y} = \hat{X}R$ se busca mantener fijo, a un nivel bajo, el error cuadrático medio. Es decir, el promedio de los errores de estimación que se cometen al

efectuar muchas veces el muestreo y obtener muchos estimadores \hat{Y} . La expresión aproximada para el error cuadrático medio de \hat{Y} es:

$$ECM(\hat{Y}) = X^2 ECM(\hat{R}) = \frac{N^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \times (S^2_Y + R^2 S^2_X - 2R\rho S_X S_Y) \dots\dots\dots(8.37)$$

Donde $S^2_Y = \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2}{N-1}$, $S^2_X = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N-1}$, $R = \frac{Y}{X}$

ρ es el coeficiente de correlación entre X_i y Y_i que es

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\left[\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

Si se quiere mantener $ECM(\hat{Y})$ igual a una constante E_0 el tamaño de la muestra es:

$$n = \frac{1}{\frac{E_0}{N^2 S^2_Y + R^2 S^2_X - 2R\rho S_X S_Y}} + \frac{1}{N} \dots\dots\dots(8.38)$$

Para usar (8.38) se requiere estimar, con una prueba piloto o bien con consideraciones a priori, los valores de: S^2_Y , S^2_X , R y ρ .

El estimador de $ECM(\hat{Y})$ se obtiene mediante:

$$\hat{ECM}(\hat{Y}) = \frac{s^2_u}{n\bar{X}^2} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \dots\dots\dots(8.39)$$

Donde

$$s^2_u = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - RX_i)^2}{n-1}$$

Así, un intervalo de confianza aproximado para el total de la población, Y , es:

$$P\left(\hat{Y} - 1.96\sqrt{\widehat{ECM}(\hat{Y})} \leq Y \leq \hat{Y} + 1.96\sqrt{\widehat{ECM}(\hat{Y})}\right) \approx 0.95 \dots\dots\dots(8.40)$$

Si para el tamaño de muestra se usa una n que cumpla con (8.36); además de cumplir con (8.38) la aproximación es suficientemente buena. Esto es, se usan expresiones (8.36) y (8.38) y se selecciona el tamaño de muestra mayor.

Para usar el estimador de razón es fundamental considerar que Y_i es proporcional a X_i ; esto es, que la relación entre esas dos variables sea del tipo señalado en la siguiente figura.

Aproximadamente $Y_i = RX_i$

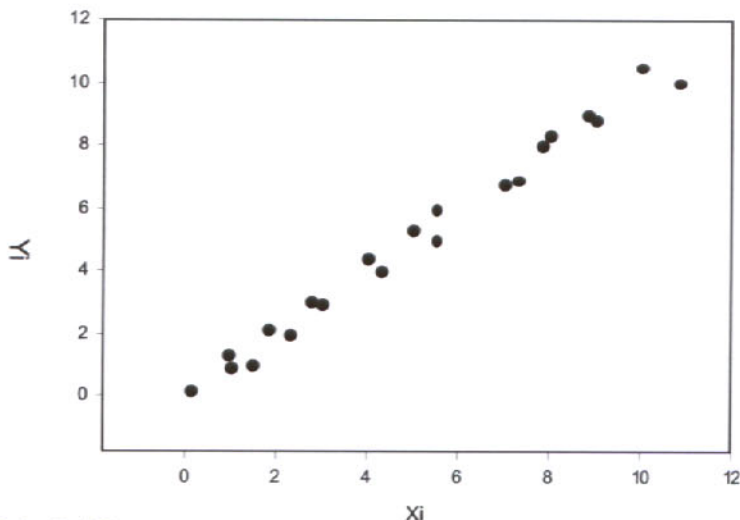


Figura 8.1. Gráfica que muestra la relación entre X_i y Y_i en un estimador de Razón.

El caso más frecuente es cuando X_i es la misma variable que Y_i , pero medida en una ocasión anterior. Algunos ejemplos de variables X_i y Y_i que se usan para construir estimadores de razón son:

Unidad de Muestreo	Variable X_i	Variable Y_i	Objetivo a estimar
Predios agrícolas	Tamaño del predio en hectáreas	Producción de Café, maíz, etc.	Y producción total
Ciudades o Pueblos	Población en el Censo anterior	Población actual	Y población total
Familias	Ingreso mensual	Gasto en alimento	R
Distritos de venta	Ventas de un Producto 3 meses Antes	Ventas futuras	Y total de Ventas
Casas habitación	Número de Habitantes en la Casa	Número de Habitaciones	R
Animales para Consumo de su Carne	Peso inicial de un Período de Engorda	Peso final	Y peso del Hato
Área de un Kilómetro cuadrado de Bosque	Conteo de árboles En una fotografía	Conteo real de Árboles en el Campo	Y total de árboles

El estimador de razón resulta más preciso que el estimador usual en MAI, si se cumple que:

$$\rho > \frac{CV(\bar{X})}{2CV(\bar{Y})}$$

Sin embargo, puede tenerse una ρ muy grande y que no funcionen bien los estimadores de razón; cuando la relación entre X_i y Y_i es como sigue:

$$Y_i = a + bX_i$$

$$a = 25, \quad b = 0.9$$

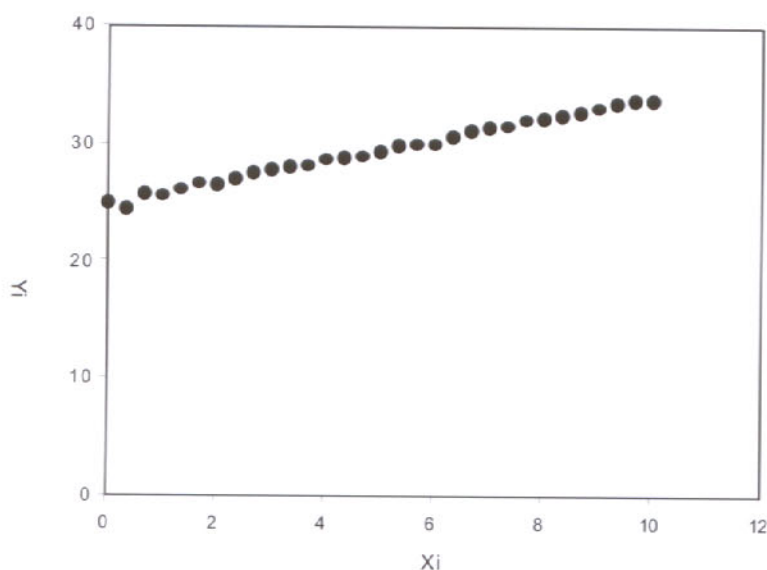


Figura 8.2. Gráfica que muestra la relación entre X_i y Y_i en un estimador de regresión.

Si a es “grande”, como es el caso del ejemplo, el estimador de razón no es adecuado, pues no hay proporcionalidad entre X_i y Y_i . Es la proporcionalidad entre X_i y Y_i la que se requiere para el buen uso de los estimadores de razón.

En el caso de muestreo por conglomerados en donde no se conocen los valores de las M_i , ni los tamaños (en número de unidades secundarias) de las unidades primarias, no se conoce el número total de unidades secundarias. Para estimar el promedio de los

valores de Y_{ij} , $\bar{Y}_e = \frac{Y}{\sum_{i=1}^N M_i}$, es necesario estimar el numerador y el denominador. Esto

toma la forma de un estimador de razón.

Estimador de

$$\bar{Y}_e = \hat{Y}_e = \frac{\sum_{i=1}^n M_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^n M_i} = \frac{\sum_{i=1}^n M_i \sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}}{\sum_{i=1}^n M_i m_i} \dots\dots\dots(8.41)$$

Un estimador de la varianza de este estimador es:

$$\hat{V}(\hat{Y}_e) = \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{s_y^2}{n\bar{M}^2} + \frac{\sum_{i=1}^n M_i^2 \left(1 - \frac{m_i}{M_i}\right) \frac{s_{wi}^2}{m_i}}{n\bar{M}^2 N} \dots\dots\dots(8.42)$$

Donde

$$\bar{M} = \frac{\sum_{i=1}^n M_i}{n}, \quad s_r^2 = \frac{\sum_{i=1}^n M_i^2 (y_i - \text{estimador de } \bar{Y}_e)^2}{n-1}$$

$$s_{wi} = \frac{\sum_{j=1}^{m_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{m_i - 1} = \text{Varianza estimada entre unidades secundarias}$$

De manera que un intervalo de confianza aproximado al 95% para \bar{Y}_e es:

$$P \left[\hat{Y}_e - 1.96 [\hat{V}(\hat{Y}_e)]^{\frac{1}{2}} \leq \bar{Y}_e \leq \hat{Y}_e + 1.96 [\hat{V}(\hat{Y}_e)]^{\frac{1}{2}} \right] = 0.95 \dots\dots\dots(8.43)$$

8.8. Estimadores de regresión

Cuando se tiene información sobre la variable X_i en todas las unidades de la población y no hay proporcionalidad entre X_i y Y_i , Y_i no se puede expresar con buena aproxi

mación como $Y_i = RX_i$, y no se deben usar estimadores de razón. Sin embargo, si la relación entre X_i y Y_i es del tipo de la Figura 8.2; es decir, que se pueda expresar como $Y_i = a + bX_i$; entonces esta información se puede incorporar en la construcción de estimadores de regresión.

La idea fundamental de los estimadores de regresión es que si se conocen \bar{X} y el valor de b , se puede conocer \bar{Y} . Se sabe que si la relación de X_i y Y_i se puede representar adecuadamente por $Y_i = a + bX_i$, entonces se tendrá que $\bar{Y}_i = a + b\bar{X}_i$. También de manera aproximada $\bar{y}_i = a + b\bar{x}_i$. Si la figura de la asociación entre X_i y Y_i es:

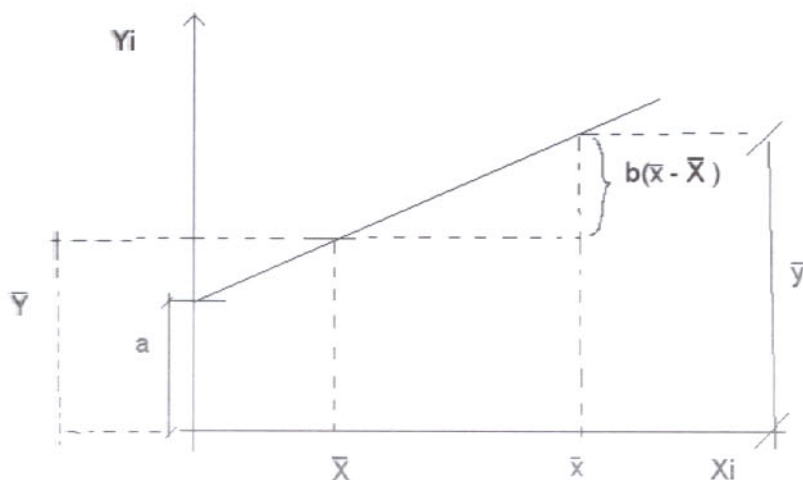


Figura 8.3. Gráfica que muestra la relación lineal $Y_i = a + bX_i$ entre X_i y Y_i .

Para estimar \bar{Y} se considera que \bar{Y} se calcula como la diferencia de dos partes $\bar{Y} = \bar{y} - b(\bar{x} - \bar{X})$. El valor de \bar{Y} sería exacto si se cumpliera exactamente que $\bar{y}_i = a + b\bar{x}_i$; sin embargo, esto no se cumple exactamente porque tanto \bar{x} como \bar{y} están sujetas a fluctuaciones aleatorias originadas por el proceso de muestreo, de modo que en realidad se tiene un estimador:

$$\hat{Y} = \bar{y} - b(\bar{x} - \bar{X}) \dots\dots\dots(8.44)$$

$$\hat{Y} = N\hat{Y} = N\{\bar{y} - b(\bar{x} - \bar{X})\} \dots\dots\dots(8.45)$$

Es difícil encontrar expresiones exactas para las varianzas o los errores medios cuadráticos (son sesgados) de estos estimadores. Sin embargo, si n es «grande»

$$V(\hat{Y}) = \frac{S_y^2(1-\rho^2)}{n} . \text{ Donde } \rho \text{ es el coeficiente de correlación entre } X_i \text{ y } Y_i$$

$$Y, S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2}{N-1}$$

Si se estiman estos dos parámetros por $s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1}$ y

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \right]^{1/2}}$$

se obtiene un estimador de $V(\hat{Y})$ y con él se pueden construir intervalos de confianza para \bar{Y} o para Y .

Si se especifica una δ para el error de estimación en \bar{Y} , esto es

$$P[|\hat{Y} - \bar{Y}| < \delta] = 1 - \alpha, \text{ se obtendrá que el tamaño de muestra adecuado es}$$

$$n = \frac{Z^2_{\alpha/2} S_y^2 (1 - \rho^2)}{\delta^2}$$

Si se desea mantener un coeficiente de variación fijo igual a CV_0 , se tiene

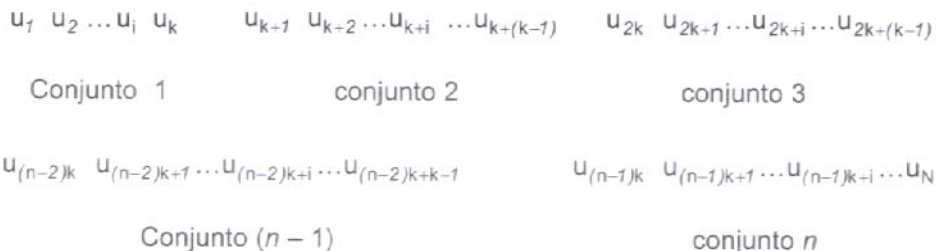
$$CV_0 = \frac{[V(\bar{Y})]^{1/2}}{\bar{Y}} = \frac{S_y [1 - \rho^2]^{1/2}}{\sqrt{n} \times \bar{Y}}, \text{ de aquí se despeja } n \text{ y se obtiene}$$

$$n = \frac{S_y^2 (1 - \rho^2)}{\bar{Y}^2 (CV_0)^2} \dots\dots\dots(8.46)$$

8.9. Muestreo sistemático con inicio aleatorio

Cuando la población se identifica en el marco de muestreo de un modo aleatorio, esto es, cuando los valores Y_i de los elementos de la población no presentan alguna regularidad en el marco, es más fácil obtener la muestra usando muestreo sistemático. En este caso la muestra se considera igual a la extraída por MAI. El muestreo sistemático consiste en dividir la población de N unidades en n subgrupos ordenados y tomar un elemento de cada subgrupo.

Con los tamaños de la población N y el número de subgrupos n se calcula $k = \frac{N}{n}$. Se tomar al azar un número entre 1 y k . Sea este número (i).



Los elementos de la muestra son:

$$\{ u_i, u_{k+i}, u_{2k+i}, \dots \dots u_{(n-2)k+i}, u_{(n-1)k+i} \}$$

Por ejemplo, si se desea investigar el ingreso de las familias de los estudiantes de una facultad. Se tiene la lista en orden alfabético por apellido. Si se considera que el apellido no tiene ninguna relación con el ingreso en pesos de la familia, se puede usar el muestreo sistemático y se considerará como una muestra aleatoria irrestricta.

Cuando la población está en un orden aleatorio en lo que respecta a los valores Y_i , se usa el muestreo sistemático para facilitar la extracción de la muestra. Este muestreo, en este caso, es equivalente al muestreo aleatorio irrestricto y se usarán por lo tanto las mismas expresiones para estimar la media o el total de la población como fue explicado mediante MAI.

Cuando la población está ordenada en relación a los valores de Y_i , con tendencia a cambiar paulatinamente dichos valores, el muestreo sistemático produce varianzas de los estimadores menores que con el método MAI. Esto se debe a que la muestra queda más dispersa sobre la población. Se asegura que la muestra sea más representativa. Un ejemplo de esta situación es la que ocurre cuando se van a muestrear ramas de un árbol para evaluar su producción de frutos. Si existe una tendencia de la producción a tener valores mayores en las ramas más bajas, el muestreo sistemático asegura que en la muestra aparezcan ramas de todas las alturas del árbol.

Otro ejemplo donde sucede esto en algunos muestreos de viviendas, donde es posible numerar las «manzanas» o cuadras iniciando en colonias de bajo nivel económico pasando gradualmente a niveles económicos altos.

No hay expresiones válidas para estimadores y varianzas de estimadores cuando se usa el muestreo sistemático en poblaciones que no tienen orden aleatorio. Cuando se usa el muestreo sistemático en poblaciones ordenadas, se pueden usar las expresiones para MAI como una aproximación y se sabe que en realidad las varianzas serán menores.

Si la población tiene un orden que se refleja en cambios periódicos de los valores de Y_i , el muestreo sistemático puede producir varianzas mayores. En este caso el problema es que la muestra puede coincidir con valores todos bajos (altos) de Y_i , siendo de esta manera poco representativa y con fluctuaciones fuertes de muestra a muestra.



Figura 8.4. Gráfica de una población con cambios periódicos de los valores de Y_i .

Esto puede suceder cuando la población consiste en los volúmenes de ventas de una tienda. Otro ejemplo es en el muestreo de plantas cultivadas (maíz, trigo, etc.) en donde ciertas áreas del terreno se riegan un día determinado y otras áreas otro día.

En resumen al muestreo sistemático puede ser mejor, igual o peor que MAI.

Población	El muestreo sistemático es:
Aleatoria	Igual que MAI
Con orden creciente o Decreciente	Mejor que MAI.
Con orden periódico	Peor que MAI

8.10. Muestreo con probabilidades proporcionales al tamaño

Cuando en el marco de muestreo se tiene información sobre una medida de las unidades (X_i) que tiene relación de tipo proporcional con la medida que nos interesa Y_i , que es desconocida, esta información se puede usar para construir estimadores de razón. Otra forma de usar ventajosamente esta información es asignando probabilidades desiguales y proporcionales a X_i para la unidad u_i .

La manera más fácil de usar probabilidades desiguales proporcionales al tamaño (el valor de X_i) es usando muestreo con reemplazo. La forma de extraer la muestra en este esquema de muestreo es la siguiente:

1. Se obtienen los valores de X_i , acumulados en un orden arbitrario.
2. Se obtiene un número aleatorio entre 1 y X . X es el total conocido para los valores de X_i
3. Se observa a que unidad corresponde el número extraído en el punto 2 y esa unidad se selecciona en la muestra.
4. Se repite el proceso a partir del punto 2, hasta completar la muestra de tamaño n .

Unidad de la población	Tamaño de la unidad	Tamaño acumulado
u_1	X_1	X_1
u_2	X_2	$X_1 + X_2$
u_3	X_3	$X_1 + X_2 + X_3$
⋮
u_i	X_i	$X_1 + X_2 + \dots + X_i$
⋮
u_{N-1}	X_{N-1}	$X_1 + X_2 + \dots + X_{N-1}$
u_N	X_N	X
Total	X	

Si por ejemplo, el número aleatorio está entre $X_1 + X_2$ y $X_1 + X_2 + X_3$ se selecciona la unidad u_3 .

Nótese que algunas unidades pueden aparecer varias veces en la muestra.

Con este procedimiento, un estimador del total de la población Y , es:

$$\hat{Y} = \frac{X}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i} \dots\dots\dots(8.47)$$

(y_1, y_2, \dots, y_n) y (x_1, x_2, \dots, x_n) son los valores de Y_i y de X_i en las unidades de la muestra (algunas pueden estar repetidas).

La varianza teórica de este estimador es:

$$V(\hat{Y}) = \frac{X}{n} \sum_{i=1}^n X_i \left(\frac{Y_i}{X_i} - \frac{Y}{X} \right)^2 \dots\dots\dots(8.48)$$

Nótese que si se tiene una proporcionalidad perfecta entre los valores de Y_i y X_i ,

entonces $\frac{Y_i}{X_i} = k \quad \forall i, Y_i = kX_i$

$$\sum_{i=1}^N Y_i = k \sum_{i=1}^N X_i, \text{ es decir, } Y = kX, \text{ de donde } k = \frac{Y}{X} = R.$$

De modo que en este caso $\left(\frac{Y_i}{X_i} - \frac{Y}{X} \right) = 0$, para toda i . $V(\hat{Y}) = 0$.

A proporcionalidad perfecta la varianza de \hat{Y} es cero; lo que implica que $\hat{Y} = Y$.

Cuando la proporcionalidad no es perfecta, pero sí bastante aproximada, el valor de \hat{Y} estará muy cerca de Y . Esto es, la varianza $V(\hat{Y})$ será un valor cercano a cero.

La manera de estimar $V(\hat{Y})$ es usando:

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \frac{X^2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i}{x_i} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i} \right)^2 \dots\dots\dots(8.49)$$

Considerando que \hat{Y} tiene distribución normal y además si se quiere tener :

$$P[|\hat{Y} - Y| < \delta] = 1 - \alpha$$

El tamaño de muestra usando muestreo con reemplazo y probabilidades proporcionales al tamaño es:

$$n = \frac{Z^2_{\alpha/2}}{\delta^2 X \sum_{i=1}^N X_i \left(\frac{Y_i}{X_i} - \frac{Y}{X} \right)^2} \dots\dots\dots(8.50)$$

Para usar esta expresión es necesario conocer:

$X \sum_{i=1}^N X_i \left(\frac{Y_i}{X_i} - \frac{Y}{X} \right)^2$, lo más conveniente es usar su estimador que es la expresión:

$$\frac{X^2}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i}{x_i} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i} \right)^2 \dots\dots\dots(8.51)$$

Si no se puede suponer distribución normal para \hat{Y} , se puede obtener un tamaño de muestra que proporcione un coeficiente de variación para \hat{Y} , esto es,

$$C.V(\hat{Y}) = \frac{[V(\hat{Y})]^{1/2}}{\hat{Y}} = CV_0, \text{ es decir}$$

$$CV_0 = \frac{\left\{ X \sum_{i=1}^N X_i \left(\frac{Y_i}{X_i} - \frac{Y}{X} \right)^2 \right\}^{1/2}}{\hat{Y}}, \text{ de aquí se despeja } n \text{ y se obtiene}$$

$$n = \frac{X \sum_{i=1}^N X_i \left(\frac{Y_i}{X_i} - \frac{Y}{X} \right)^2}{(CV_0)^2 \hat{Y}^2} \dots\dots\dots(8.52)$$

El numerador de (8.52) se estima con (8.51).

REFERENCIAS

- Bhattacharyya, G. K, y Johnson, R. A., 1976. *Statistical Concepts and Methods*, J. Wiley & Sons. USA. 639 p.
- Cochran, W. G. 1984. *Técnicas de Muestreo*. Cuarta impresión, Compañía Editorial Continental. Wiley & Sons. México. 513 p.
- Méndez, R. I. 1980. *Conceptos Muy Elementales de Muestreo con Énfasis en la Determinación Práctica del Tamaño de la Muestra*. 2ª Reimpresión. Comunicaciones Técnicas, IMAS – UNAM. México. 55 p.
- Pérez, L. C. 2006. *Muestreo Estadístico (Conceptos y Problemas Resueltos)*. Pearson Prentice Hall. España. 374 p.

Apéndice

Tablas estadísticas

- A. Probabilidades acumuladas para una variable aleatoria con distribución Binomial.
- B. Probabilidades acumuladas para una variable aleatoria con distribución Poisson.
- C. Distribución Normal estándar (Z): Área acumulada a la izquierda.
- D. Distribución t. Valores críticos t.
- E. Distribución Chi cuadrada (χ^2): Área a la derecha del valor crítico.
- F. Distribución de F: Área a la derecha del valor crítico.
- G. Selección de cuadros latinos.
- H. Números aleatorios

TABLA A.1. Probabilidades acumuladas para una variable aleatoria con distribución Binomial

n	x	p									
		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
2	0	00.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.250
	1	0.9975	0.9900	0.9775	0.9600	0.9375	0.9100	0.8775	0.8400	0.7975	0.7500
3	0	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250
	1	0.9927	0.9720	0.9393	0.8960	0.8438	0.7840	0.7182	0.6480	0.5747	0.5000
	2	0.9999	0.9990	0.9966	0.9920	0.9844	0.9730	0.9571	0.9360	0.9089	0.8150
4	0	0.8145	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625
	1	0.9860	0.9477	0.8905	0.8192	0.7383	0.6517	0.5630	0.4752	0.3910	0.3125
	2	0.9995	0.9963	0.9880	0.9728	0.9492	0.9163	0.8135	0.8208	0.7585	0.6815
	3	1.0000	0.9999	0.9995	0.9984	0.9961	0.9919	0.9850	0.9744	0.9590	0.9315
5	0	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313
	1	0.9774	0.9185	0.8352	0.7373	0.6328	0.5282	0.4284	0.3370	0.2562	0.1815
	2	0.9988	0.9914	0.9734	0.9421	0.8965	0.8369	0.7648	0.6826	0.5931	0.5000
	3	1.0000	0.9995	0.9918	0.9933	0.9844	0.9692	0.9460	0.9130	0.8688	0.8125
	4	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9976	0.9947	0.9898	0.9815	0.9688
6	0	0.7351	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.0754	0.0467	0.0277	0.0156
	1	0.9672	0.8857	0.7765	0.6554	0.5339	0.4202	0.3191	0.2333	0.1636	0.1094
	2	0.9978	0.9842	0.9527	0.9011	0.8306	0.7443	0.6471	0.5443	0.4415	0.3438
	3	0.9999	0.9987	0.9941	0.9830	0.9624	0.9295	0.8826	0.8208	0.7447	0.6563
	4	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9954	0.9891	0.9777	0.9590	0.9308	0.8906
	5	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9982	0.9959	0.9917	0.9844

7	0	0.6983	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0490	0.0280	0.0152	0.0018
	1	0.9556	0.8503	0.7166	0.5767	0.4449	0.3294	0.2338	0.1586	0.1024	0.0625
	2	0.9962	0.9743	0.9262	0.8520	0.7564	0.6471	0.5323	0.4199	0.3164	0.2266
	3	0.9998	0.9973	0.9879	0.9667	0.9294	0.8740	0.8002	0.7102	0.6083	0.5000
	4	1.0000	0.9998	0.9988	0.9953	0.9871	0.9712	0.9444	0.9037	0.8471	0.7134
	5	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9962	0.9910	0.9812	0.9643	0.9315
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9984	0.9963	0.9922
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039
	1	0.9428	0.8131	0.6572	0.5033	0.3671	0.2553	0.1691	0.1064	0.0632	0.0352
	2	0.9942	0.9619	0.8948	0.7969	0.6785	0.5518	0.4278	0.3154	0.2201	0.1445
	3	0.9996	0.9950	0.9786	0.9437	0.8862	0.8059	0.7064	0.5941	0.4770	0.3633
	4	1.0000	0.9996	0.9971	0.9896	0.9721	0.9420	0.8939	0.8263	0.7396	0.6361
	5	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9958	0.9887	0.9747	0.9502	0.9115	0.8555
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9964	0.9915	0.9819	0.9648
9	0	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020
	1	0.9288	0.7748	0.5995	0.4362	0.3003	0.1960	0.1211	0.0705	0.0385	0.0195
	2	0.9916	0.9470	0.8591	0.7382	0.6007	0.4628	0.3373	0.2318	0.1495	0.0898
	3	0.9994	0.9917	0.9661	0.9144	0.8343	0.7297	0.6089	0.4826	0.3614	0.2539
	4	1.0000	0.9991	0.9944	0.9804	0.9511	0.9012	0.8283	0.7334	0.6214	0.5000
	5	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9900	0.9747	0.9464	0.9006	0.8342	0.1461
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9957	0.9888	0.9750	0.9502	0.9102

TABLA A.2. Probabilidades acumuladas para una variable aleatoria con distribución Binomial. Continuación.

<i>n</i>	<i>x</i>	<i>P</i>									
		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
9	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9986	0.9962	0.9909	0.9805
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980
10	0	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
	1	0.9139	0.7361	0.5443	0.3758	0.2440	0.1493	0.0860	0.0464	0.0233	0.0107
	2	0.9885	0.9298	0.8202	0.6778	0.5256	0.3828	0.2616	0.1673	0.0996	0.0547
	3	0.9990	0.9872	0.9500	0.8791	0.7759	0.6496	0.5138	0.3823	0.2660	0.1719
	4	0.9999	0.9984	0.9901	0.9672	0.9219	0.8497	0.7515	0.6331	0.5044	0.3770
	5	1.0000	0.9999	0.9986	0.9936	0.9803	0.9527	0.9051	0.8338	0.7384	0.6230
	6	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9965	0.9894	0.9740	0.9452	0.8980	0.8281
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9952	0.9877	0.9726	0.9453
11	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983	0.9955	0.9893
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990
	0	0.5688	0.3138	0.1673	0.0859	0.0422	0.0198	0.0088	0.0036	0.0014	0.0005
	1	0.8981	0.6974	0.4922	0.3221	0.1971	0.1130	0.0606	0.0302	0.0139	0.0059
	2	0.9848	0.9104	0.7788	0.6174	0.4552	0.3127	0.2001	0.1189	0.0652	0.0327
	3	0.9984	0.9815	0.9306	0.8389	0.7133	0.5696	0.4256	0.2963	0.1911	0.1133
	4	0.9999	0.9972	0.9841	0.9496	0.8854	0.7897	0.6683	0.5328	0.3971	0.2744
	5	1.0000	0.9997	0.9973	0.9883	0.9657	0.9218	0.8513	0.7535	0.6331	0.5000
	6	1.0000	1.0000	0.9997	0.9980	0.9924	0.9784	0.9499	0.9006	0.8262	0.7256
7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9957	0.9878	0.9707	0.9390	0.8867	

	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9980	0.9941	0.9852	0.9673
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9978	0.9941
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9995
12	0	0.5404	0.2824	0.1422	0.0687	0.0317	0.0138	0.0057	0.0022	0.0008	0.0002
	1	0.8816	0.6590	0.4435	0.2749	0.1584	0.0850	0.0424	0.0196	0.0083	0.0032
	2	0.9804	0.8891	0.7358	0.5583	0.3907	0.2528	0.1513	0.0834	0.0421	0.0193
	3	0.9978	0.9744	0.9078	0.7946	0.6488	0.4925	0.3467	0.2253	0.1345	0.0730
	4	0.9998	0.9957	0.9761	0.9274	0.8424	0.7237	0.5833	0.4382	0.3044	0.1938
	5	1.0000	0.9995	0.9954	0.9806	0.9456	0.8822	0.7873	0.6652	0.5269	0.3872
	6	1.0000	0.9999	0.9993	0.9961	0.9857	0.9614	0.9154	0.8418	0.7393	0.6128
	7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9972	0.9905	0.9745	0.9427	0.8883	0.8062
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9983	0.9944	0.9847	0.9644	0.9270
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9992	0.9972	0.9921	0.9807
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9968
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
13	0	0.5133	0.2542	0.1209	0.0550	0.0238	0.0097	0.0037	0.0013	0.0004	0.0001
	1	0.8646	0.6213	0.3983	0.2336	0.1267	0.0637	0.0296	0.0126	0.0049	0.0017
	2	0.9755	0.8661	0.6920	0.5017	0.3326	0.2025	0.1132	0.0579	0.0269	0.0112
	3	0.9969	0.9658	0.8820	0.7473	0.5843	0.4206	0.2783	0.1686	0.0929	0.0461
	4	0.9997	0.9935	0.9658	0.9009	0.7940	0.6543	0.5005	0.3530	0.2279	0.1334
	S	1.0000	0.9991	0.9925	0.9700	0.9198	0.8346	0.7159	0.5744	0.4268	0.2905
	6	1.0000	0.9999	0.9987	0.9930	0.9757	0.9376	0.8705	0.7712	0.6437	0.5000
	7	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9944	0.9818	0.9538	0.9023	0.8212	0.7095

TABLA A.3. Probabilidades acumuladas para una variable aleatoria con distribución Binomial. Continuación.

<i>n</i>	<i>x</i>	<i>p</i>									
		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
13	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9960	0.9874	0.9679	0.9302	0.8666
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9975	0.9922	0.9797	0.9539
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9987	0.9959	0.9888
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
14	0	0.4877	0.2288	0.1028	0.0440	0.0178	0.0068	0.0024	0.0008	0.0002	0.0001
	1	0.8470	0.5846	0.3567	0.1979	0.1010	0.0475	0.0205	0.0081	0.0029	0.0009
	2	0.9699	0.8416	0.6479	0.4481	0.2811	0.1608	0.0839	0.0398	0.0170	0.0065
	3	0.9958	0.9559	0.8535	0.6982	0.5213	0.3552	0.2205	0.1243	0.0632	0.0287
	4	0.9996	0.9908	0.9533	0.8702	0.7415	0.5842	0.4227	0.2793	0.1672	0.0898
	5	1.0000	0.9985	0.9885	0.9561	0.8883	0.7805	0.6405	0.4859	0.3373	0.2120
	6	1.0000	0.9998	0.9978	0.9884	0.9617	0.9067	0.8164	0.6925	0.5461	0.3953
	7	1.0000	1.0000	0.9997	0.9976	0.9897	0.9685	0.9247	0.8499	0.7414	0.6047
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9978	0.9917	0.9757	0.9417	0.8811	0.7880
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9983	0.9940	0.9825	0.9574	0.9102
15	0	0.4633	0.2059	0.0874	0.0352	0.0134	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000
	1	0.8463	0.5846	0.3567	0.1979	0.1010	0.0475	0.0205	0.0081	0.0029	0.0009
	2	0.9699	0.8416	0.6479	0.4481	0.2811	0.1608	0.0839	0.0398	0.0170	0.0065
	3	0.9958	0.9559	0.8535	0.6982	0.5213	0.3552	0.2205	0.1243	0.0632	0.0287
	4	0.9996	0.9908	0.9533	0.8702	0.7415	0.5842	0.4227	0.2793	0.1672	0.0898

	1	0.8290	0.5490	0.3186	0.1671	0.0802	0.0353	0.0142	0.0052	0.0017	0.0005
	2	0.9638	0.8159	0.6042	0.3980	0.2361	0.1268	0.0617	0.0271	0.0107	0.0037
	3	0.9945	0.9444	0.8227	0.6482	0.4613	0.2969	0.1727	0.0905	0.0424	0.0176
	4	0.9994	0.9873	0.9383	0.8358	0.6865	0.5155	0.3519	0.2173	0.1204	0.0592
	5	0.9999	0.9978	0.9832	0.9389	0.8516	0.7216	0.5643	0.4032	0.2608	0.1509
	6	1.0000	0.9997	0.9964	0.9819	0.9434	0.8689	0.7548	0.6098	0.4522	0.3036
	7	1.0000	1.0000	0.9994	0.9958	0.9827	0.9500	0.8868	0.7869	0.6535	0.5000
	8	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9958	0.9848	0.9578	0.9050	0.8182	0.6964
	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9963	0.9876	0.9662	0.9231	0.8491
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9972	0.9907	0.9745	0.9408	
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9981	0.9937	0.9824	
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9963	
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
16	0	0.4401	0.1853	0.0743	0.0281	0.0100	0.0033	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000
	1	0.8108	0.5147	0.2839	0.1407	0.0635	0.0261	0.0098	0.0033	0.0010	0.0003
	2	0.9571	0.7892	0.5614	0.3518	0.1971	0.0994	0.0451	0.0183	0.0066	0.0021
	3	0.9930	0.9316	0.7899	0.5981	0.4050	0.2459	0.1339	0.0651	0.0281	0.0106
	4	0.9991	0.9830	0.9209	0.7982	0.6302	0.4499	0.2892	0.1666	0.0853	0.0384
	5	0.9999	0.9967	0.9765	0.9183	0.8103	0.6598	0.4900	0.3288	0.1976	0.1051
	6	1.0000	0.9995	0.9944	0.9733	0.9204	0.8247	0.6881	0.5272	0.3660	0.2272
	7	1.0000	0.9999	0.9989	0.9930	0.9729	0.9256	0.8406	0.7161	0.5629	0.4018
	8	1.0000	1.0000	0.9998	0.9985	0.9925	0.9743	0.9329	0.8577	0.7441	0.5982
	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9984	0.9929	0.9771	0.9417	0.8759	0.7728

TABLA A.4. Probabilidades acumuladas para una variable aleatoria con distribución Binomial. Continuación.

n	x	p									
		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
16	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9938	0.9809	0.9514	0.8949
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9951	0.9851	0.9616
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9991	0.9965	0.9894
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9979
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997
17	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	0	0.4181	0.1668	0.0631	0.0225	0.0075	0.0023	0.0007	0.0002	0.0000	0.0000
	1	0.7922	0.4818	0.2525	0.1182	0.0501	0.0193	0.0067	0.0021	0.0006	0.0001
	2	0.9497	0.7618	0.5198	0.3096	0.1637	0.0774	0.0327	0.0123	0.0041	0.0012
	3	0.9912	0.9174	0.7556	0.5489	0.3530	0.2019	0.1028	0.0464	0.0184	0.0064
	4	0.9988	0.9779	0.9013	0.7582	0.5739	0.3887	0.2348	0.1260	0.0596	0.0245
	5	0.9999	0.9953	0.9681	0.8943	0.7653	0.5968	0.4197	0.2639	0.1471	0.0717
	6	1.0000	0.9992	0.9917	0.9623	0.8929	0.7752	0.6188	0.4478	0.2902	0.1662
	7	1.0000	0.9999	0.9983	0.9891	0.9598	0.8954	0.7872	0.6405	0.4743	0.3145
	8	1.0000	1.0000	0.9997	0.9974	0.9876	0.9597	0.9006	0.8011	0.6626	0.5000
	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9969	0.9873	0.9617	0.9081	0.8166	0.6855
	10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9968	0.9880	0.9652	0.9174	0.8338
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9970	0.9894	0.9699	0.9283
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9975	0.9914	0.9755	
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9981	0.9936	

	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9988
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18	0	0.3972	0.1501	0.0536	0.0180	0.0056	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.7735	0.4503	0.2241	0.0991	0.0395	0.0142	0.0046	0.0013	0.0003	0.0001
	2	0.9419	0.7338	0.4797	0.2713	0.1353	0.0600	0.0236	0.0082	0.0025	0.0007
	3	0.9891	0.9018	0.7202	0.5010	0.3057	0.1646	0.0783	0.0328	0.0120	0.0038
	4	0.9985	0.9718	0.8794	0.7164	0.5187	0.3327	0.1886	0.0942	0.0411	0.0154
	5	0.9998	0.9936	0.9581	0.8671	0.7175	0.5344	0.3550	0.2088	0.1077	0.0481
	6	1.0000	0.9988	0.9882	0.9487	0.8610	0.7217	0.5491	0.3743	0.2258	0.1189
	7	1.0000	0.9998	0.9973	0.9837	0.9431	0.8593	0.7283	0.5634	0.3915	0.2403
	8	1.0000	1.0000	0.9995	0.9957	0.9807	0.9404	0.8609	0.7368	0.5778	0.4073
	9	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9946	0.9790	0.9403	0.8653	0.7473	0.5927
	10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9939	0.9788	0.9424	0.8720	0.7597
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9986	0.9938	0.9797	0.9463	0.8811
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9986	0.9942	0.9817	0.9519
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9951	0.9846
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9962
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
19	0	0.3774	0.1351	0.0456	0.0144	0.0042	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.7547	0.4203	0.1985	0.0829	0.0310	0.0104	0.0031	0.0008	0.0002	0.0000
	2	0.9335	0.7054	0.4413	0.2369	0.1113	0.0462	0.0170	0.0055	0.0015	0.0004

Tabla A.5. Probabilidades acumuladas para una variable aleatoria con distribución Binomial. Continuación.

<i>n</i>	<i>x</i>	<i>p</i>									
		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
19	3	0.9868	0.8850	0.6841	0.4551	0.2631	0.1332	0.0591	0.0230	0.0077	0.0022
	4	0.9980	0.9648	0.8556	0.6733	0.4654	0.2822	0.1500	0.0696	0.0280	0.0096
	5	0.9998	0.9914	0.9463	0.8369	0.6678	0.4739	0.2968	0.1629	0.0777	0.0318
	6	1.0000	0.9983	0.9837	0.9324	0.825 1	0.6655	0.4812	0.3081	0.1727	0.0835
	7	1.0000	0.9997	0.9959	0.9767	0.9225	0.8180	0.6656	0.4878	0.3169	0.1796
	8	1.0000	1.0000	0.9992	0.9933	0.9713	0.9161	0.8145	0.6675	0.4940	0.3238
	9	1.0000	1.0000	0.9999	0.9984	0.9911	0.9674	0.9125	0.8139	0.6710	0.5000
	10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9977	0.9895	0.9653	0.911 5	0.8159	0.6762
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9972	0.9886	0.9648	0.9129	0.8204
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9884	0.9658	0.9165
20	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9969	0.9891	0.9682
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9972	0.9904
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9978
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	0	0.3585	0.1216	0.0388	0.011 5	0.0032	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.7358	0.3917	0.1756	0.06.92	0.0243	0.0076	0.0021	0.0005	0.0001	0.0000
	2	0.9245	0.6769	0.4049	0.2061	0.0913	0.0355	0.0121	0.0036	0.0009	0.0002
	3	0.9841	0.8670	0.6477	0.4114	0.2252	0.1071	0.0444	0.0160	0.0049	0.0013

4	0.9974	0.9568	0.8298	0.6296	0.4148	0.2375	0.1182	0.0510	0.0189	0.0059
5	0.9997	0.9887	0.9327	0.8042	0.6172	0.4164	0.2454	0.1256	0.0553	0.0207
6	1.0000	0.9976	0.9781	0.9133	0.7858	0.6080	0.4166	0.2500	0.1299	0.0577
7	1.0000	0.9996	0.9941	0.9679	0.8982	0.7723	0.6010	0.41 59	0.2520	0.1316
8	1.0000	0.9999	0.9987	0.9900	0.9591	0.8867	0.7624	0.5956	0.4143	0.2517
9	1.0000	1.0000	0.9998	0.9974	0.9861	0.9520	0.8782	0.7553	0.5914	0.4119
10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9994	0.9961	0.9829	0.9468	0.8725	0.7507	0.5881
11	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9949	0.9804	0.9435	0.8692	0.7483
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9987	0.9940	0.9790	0.9420	0.8684
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9985	0.9935	0.9786	0.9423
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9936	0.9793
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9985	0.9941
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

TABLA A.6. Probabilidades acumuladas para una variable aleatoria con distribución Binomial. Continuación n= 25.

x	p												
	.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99
0	.7778	.2774	.0718	.0038	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1	.9742	.6424	.2712	.0274	.0016	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	.9980	.8729	.5371	.0982	.0090	.0004	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
3	.9999	.9659	.7636	.2340	.0332	.0024	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
4	1.0000	.9928	.9020	.4207	.0905	.0095	.0005	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
5	1.0000	.9988	.9666	.6167	.1935	.0294	.0020	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
6	1.0000	.9998	.9905	.7800	.3407	.0736	.0073	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
7	1.0000	1.0000	.9977	.8909	.5118	.1536	.0216	.0012	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
8	1.0000	1.0000	.9995	.9532	.6769	.2735	.0539	.0043	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
9	1.0000	1.0000	.9999	.9827	.8106	.4246	.1148	.0132	.0005	.0000	.0000	.0000	.0000
10	1.0000	1.0000	1.0000	.9944	.9022	.5858	.2122	.0344	.0018	.0000	.0000	.0000	.0000
11	1.0000	1.0000	1.0000	.9985	.9558	.7323	.3450	.0778	.0060	.0001	.0000	.0000	.0000
12	1.0000	1.0000	1.0000	.9996	.9825	.8462	.5000	.1538	.0175	.0004	.0000	.0000	.0000
13	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9940	.9222	.6550	.2677	.0442	.0015	.0000	.0000	.0000
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9982	.9656	.7878	.4142	.0978	.0056	.0000	.0000	.0000
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9995	.9868	.8852	.5754	.1894	.0173	.0001	.0000	.0000
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9957	.9461	.7265	.3231	.0468	.0005	.0000	.0000
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9988	.9784	.8464	.4882	.1091	.0023	.0000	.0000
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9927	.9264	.6593	.2200	.0095	.0002	.0000
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9980	.9706	.8065	.3833	.0334	.0012	.0000

20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9995	.9905	.9095	.5793	.0980	.0072	.0000
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9976	.9668	.7660	.2364	.0341	.0001
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9996	.9910	.9018	.4629	.1271	.0020	
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9984	.9726	.7288	.3576	.0258	
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9962	.9282	.7226	.2222	

TABLA B.1. Probabilidades acumuladas para una variable aleatoria con distribución Poisson.

c	Distribución Poisson $P[X \leq c] = \sum_{x=0}^c \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$									
	λ									
	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	1.00
0	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368
1	.995	.982	.963	.938	.910	.878	.844	.809	.772	.736
2	1.000	.999	.996	.992	.986	.977	.966	.953	.937	.920
3	1.000	1.000	1.000	.999	.998	.997	.994	.991	.987	.981
4	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.999	.998	.996
5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999
6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

	λ									
c	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	2.00
0	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135
1	.699	.663	.627	.592	.558	.525	.493	.463	.434	.406
2	.900	.879	.857	.833	.809	.783	.757	.731	.704	.677
3	.974	.966	.957	.946	.934	.921	.907	.891	.875	.857
4	.995	.992	.989	.986	.981	.976	.970	.964	.956	.947
5	.999	.998	.998	.997	.996	.994	.992	.990	.987	.983
6	1.000	1.000	1.000	.999	.999	.999	.998	.997	.997	.995
7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.999	.999
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

c	λ									
	2.10	2.20	2.30	2.40	2.50	2.60	2.70	2.80	2.90	3.00
0	.122	.111	.100	.091	.082	.074	.067	.061	.055	.050
1	.380	.355	.331	.308	.287	.267	.249	.231	.215	.199
2	.650	.623	.596	.570	.544	.518	.494	.469	.446	.423
3	.839	.819	.799	.779	.758	.736	.714	.692	.670	.647
4	.938	.928	.916	.904	.891	.877	.863	.848	.832	.815
5	.980	.975	.970	.964	.958	.951	.943	.935	.926	.916
6	.994	.993	.991	.988	.986	.983	.979	.976	.971	.966
7	.999	.998	.997	.997	.996	.995	.993	.992	.990	.988
8	1.000	1.000	.999	.999	.999	.999	.998	.998	.997	.996
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.999	.999	.999
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

TABLA B.2. Probabilidades acumuladas para una variable aleatoria con distribución Poisson. Continuación.

Distribución Poisson $P[X \leq c] = \sum_{x=0}^{c} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$

c	λ									
	3.10	3.20	3.30	3.40	3.50	3.60	3.70	3.80	3.90	4.00
0	.045	.041	.037	.033	.030	.027	.025	.022	.020	.018
1	.185	.171	.159	.147	.136	.126	.116	.107	.099	.092
2	.401	.380	.359	.340	.321	.303	.285	.269	.253	.238
3	.625	.603	.580	.558	.537	.515	.494	.473	.453	.433
4	.798	.781	.763	.744	.725	.706	.687	.668	.648	.629
5	.906	.895	.883	.871	.858	.844	.830	.816	.801	.785
6	.961	.955	.949	.942	.935	.927	.918	.909	.899	.889
7	.986	.983	.980	.977	.973	.969	.965	.960	.955	.949
8	.995	.994	.993	.992	.990	.988	.986	.984	.981	.979
9	.999	.998	.998	.997	.997	.996	.995	.994	.993	.992
10	1.000	1.000	.999	.999	.999	.999	.998	.998	.998	.997
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.999	.999
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

c	λ									
	4.50	5.00	5.50	6.00	6.50	7.00	7.50	8.00	8.50	9.00
0	.011	.007	.004	.002	.002	.001	.001	.000	.000	.000
1	.061	.040	.027	.017	.011	.007	.005	.003	.002	.001
2	.174	.125	.088	.062	.043	.030	.020	.014	.009	.006
3	.342	.265	.202	.151	.112	.082	.059	.042	.030	.021
4	.532	.440	.358	.285	.224	.173	.132	.100	.074	.055
5	.703	.616	.529	.446	.369	.301	.241	.191	.150	.116
6	.831	.762	.686	.606	.527	.450	.378	.313	.256	.207
7	.913	.867	.809	.744	.673	.599	.525	.453	.386	.324
8	.960	.932	.894	.847	.792	.729	.662	.593	.523	.456
9	.983	.968	.946	.916	.877	.830	.776	.717	.653	.587
10	.993	.986	.975	.957	.933	.901	.862	.816	.763	.706
11	.998	.995	.989	.980	.966	.947	.921	.888	.849	.803
12	.999	.998	.996	.991	.984	.973	.957	.936	.909	.876
13	1.000	.999	.998	.996	.993	.987	.978	.966	.949	.926
14	1.000	1.000	.999	.999	.997	.994	.990	.983	.973	.959
15	1.000	1.000	1.000	.999	.999	.998	.995	.992	.986	.978
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.998	.996	.993	.989
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.998	.997	.995
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.999	.998
19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.999
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
21	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
22	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

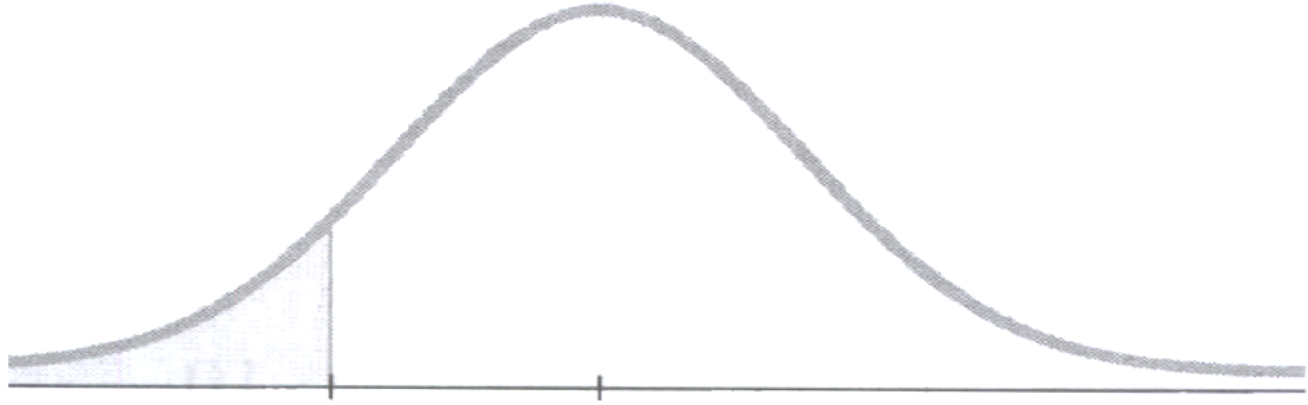
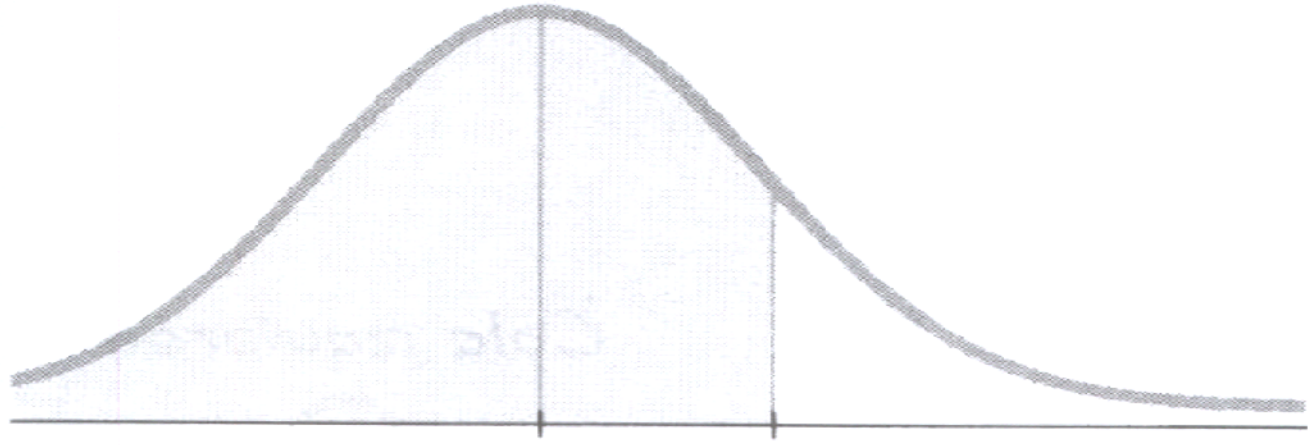


TABLA C.1. Distribución normal estándar (z): Área acumulativa de la IZQUIERDA

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.50										
Y										
menores	.0001									
-3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
-3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
-3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
-3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
-3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
-2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
-2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
-1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
-1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
-1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
-1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
-1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
-1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
-0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611

-0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
-0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
-0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
-0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
-0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
-0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
-0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
-0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
-0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

NOTA: Para valores de z por debajo de -3.49 , utilice 0.0001 para el área.

TABLA C.2. (Continuación) Área acumulativa de la IZQUIERDA

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974

2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.50	.9999									

Y mayores

NOTA: Para valores de z por encima de 3.49, utilice 0.9999 para el área.

TABLA D. Distribución t Valores críticos t

Grados de libertad	Área en una cola				
	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10
	Área en dos colas				
	0.01	0.02	0.05	0.10	0.20
1	63.657	31.821	12.706	6.314	3.078
2	9.925	6.965	4.303	2.920	1.886
3	5.841	4.541	3.182	2.353	1.638
4	4.604	3.747	2.776	2.132	1.533
5	4.032	3.365	2.571	2.015	1.476
6	3.707	3.143	2.447	1.943	1.440
7	3.499	2.998	2.365	1.895	1.415
8	3.355	2.896	2.306	1.860	1.397
9	3.250	2.821	2.262	1.833	1.383
10	3.169	2.764	2.228	1.812	1.372
11	3.106	2.718	2.201	1.796	1.363
12	3.055	2.681	2.179	1.782	1.356
13	3.012	2.650	2.160	1.771	1.350
14	2.977	2.624	2.145	1.761	1.345
15	2.947	2.602	2.131	1.753	1.341
16	2.921	2.583	2.120	1.746	1.337
17	2.898	2.567	2.110	1.740	1.333
18	2.878	2.552	2.101	1.734	1.330
19	2.861	2.539	2.093	1.729	1.328
20	2.845	2.528	2.086	1.725	1.325
21	2.831	2.518	2.080	1.721	1.323
22	2.819	2.508	2.074	1.717	1.321
23	2.807	2.500	2.069	1.714	1.319
24	2.797	2.492	2.064	1.711	1.318
25	2.787	2.485	2.060	1.708	1.316
26	2.779	2.479	2.056	1.706	1.315

27	2.771	2.473	2.052	1.703	1.314
28	2.763	2.467	2.048	1.701	1.313
29	2.756	2.462	2.045	1.699	1.311
30	2.750	2.457	2.042	1.697	1.310
31	2.744	2.453	2.040	1.696	1.309
32	2.738	2.449	2.037	1.694	1.309
34	2.728	2.441	2.032	1.691	1.307
36	2.719	2.434	2.028	1.688	1.306
38	2.712	2.429	2.024	1.686	1.304
40	2.704	2.423	2.021	1.684	1.303
45	2.690	2.412	2.014	1.679	1.301
50	2.678	2.403	2.009	1.676	1.299
55	2.668	2.396	2.004	1.673	1.297
60	2.660	2.390	2.000	1.671	1.296
65	2.654	2.385	1.997	1.669	1.295
70	2.648	2.381	1.994	1.667	1.294
75	2.643	2.377	1.992	1.665	1.293
80	2.639	2.374	1.990	1.664	1.292
90	2.632	2.368	1.987	1.662	1.291
100	2.626	2.364	1.984	1.660	1.290
200	2.601	2.345	1.972	1.653	1.286
300	2.592	2.339	1.968	1.650	1.284
400	2.588	2.336	1.966	1.649	1.284
500	2.586	2.334	1.965	1.648	1.283
750	2.582	2.331	1.963	1.647	1.283
1000	2.581	2.330	1.962	1.646	1.282
2000	2.578	2.328	1.961	1.646	1.282
Grande	2.576	2.326	1.960	1.645	1.282

TABLA E. Distribución chi cuadrada (X²) Área a la derecha del valor crítico

Grados de libertad	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	-	-	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.071	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.299
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582

20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.042	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.194	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.257	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.954	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

Comité Editorial del **CENID-RASPA**

Presidente: Dr. José Antonio Cueto Wong

Secretario: Dr. Miguel A. Velásquez Valle

Vocales: Dr. Juan Estrada Avalos
M. C. Miguel Rivera González

Edición Técnica:

Dr. Ricardo Valdez Cepeda

Edición Estilo:

Olivia Elizabeth Ortiz Rivas

Esta publicación se terminó de imprimir en el mes de
Diciembre del 2009 en los talleres del Grupo Colorama,
Adolfo Aymes No. 50 Cd. Industrial,
Torreón, Coahuila C. P. 27000.
Tel. (871)7506500
Su tiraje consta de 600 ejemplares

CENID-RASPA

Km 6.5 margen derecha canal Sacramento
Gómez Palacio. Durango. México.

C. P. 35140, Cd. Lerdo, Dgo.

Tels. y Fax: 01 (871) 719-10-76, 719-10-77 y 719-11-34